

NEW/OLD

# ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

## අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2020

# 10 - සංයුක්ත ගණිතය I

## නව/පැරණි නිර්දේශය

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

මෙය උත්තරපත්‍ර පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා සකස් කෙරිණි.
ප්‍රධාන/ සහකාර පරීක්ෂක රැස්වීමේ දී ඉදිරිපත්වන අදහස් අනුව මෙහි වෙනස්කම් කරනු ලැබේ.

අවසන් සංශෝධන ඇතුළත් කළ යුතුව ඇත.

# අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - 2020

# 10 - සංයුක්ත ගණිතය I

# (නව/පැරණි නිර්දේශ)

## ලකුණු බෙදීයාම

I පත්‍රය

A කොටස : 10 × 25 = 250

B කොටස : 05 × 150 = 750

එකතුව = 1000 / 10

I පත්‍රය අවසාන ලකුණ = 100

# උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ පොදු ශිල්පීය ක්‍රම

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ හා ලකුණු ලැයිස්තුවල ලකුණු සටහන් කිරීමේ සම්මත ක්‍රමය අනුගමනය කිරීම අනිවාර්යයෙන් ම කළ යුතුවේ. ඒ සඳහා පහත පරිදි කටයුතු කරන්න.

1. උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමට රතුපාට බෝල් පොයින්ට් පෑනක් පාවිච්චි කරන්න.

2. සෑම උත්තරපත්‍රයකම මුල් පිටුවේ සහකාර පරීක්ෂක සංකේත අංකය සටහන් කරන්න. ඉලක්කම් ලිවීමේදී **පැහැදිලි ඉලක්කමෙන්** ලියන්න.

3. ඉලක්කම් ලිවීමේදී වැරදුණු අවස්ථාවක් වේ නම් එය පැහැදිලිව තනි ඉරකින් කපා හැර නැවත ලියා කෙටි අත්සන යොදන්න.

4. එක් එක් ප්‍රශ්නයේ අනු කොටස්වල පිළිතුරු සඳහා හිමි ලකුණු ඒ ඒ කොටස අවසානයේ △ ක් තුළ ලියා දක්වන්න. අවසාන ලකුණු ප්‍රශ්න අංකයත් සමඟ □ ක් තුළ, භාග සංඛ්‍යාවක් ලෙස ඇතුළත් කරන්න. ලකුණු සටහන් කිරීම සඳහා පරීක්ෂකවරයාගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා ඇති තීරුව භාවිත කරන්න.

**උදාහරණ : ප්‍රශ්න අංක 03**

(i) ............................................................ √ $\frac{4}{5}$
............................................................
............................................................

(ii) ............................................................ √ $\frac{3}{5}$
............................................................
............................................................

(iii) ............................................................ √ $\frac{3}{5}$
............................................................
............................................................

(03) (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\frac{10}{15}$

**බහුවරණ උත්තරපත්‍ර : (කවුළු පත්‍රය)**

1. අ.පො.ස. (උ.පෙළ) හා තොරතුරු තාක්ෂණ විභාගය සඳහා කවුළු පත්‍ර දෙපාර්තමේන්තුව මගින් සකසනු ලැබේ. නිවැරදි වරණ කපා ඉවත් කළ සහතික කරන ලද කවුළුපතක් ඔබ වෙත සපයනු ලැබේ. සහතික කළ කවුළු පත්‍රයක් භාවිත කිරීම පරීක්ෂකගේ වගකීම වේ.

2. අනතුරුව උත්තරපත්‍ර හොඳින් පරීක්ෂා කර බලන්න. කිසියම් ප්‍රශ්නයකට එක් පිළිතුරකට වඩා ලකුණු කර ඇත්නම් හෝ එකම පිළිතුරක්වත් ලකුණු කර නැත්නම් හෝ වරණ කැපී යන පරිදි ඉරක් අඳින්න. ඇතැම් විට අයදුම්කරුවන් විසින් මුලින් ලකුණු කර ඇති පිළිතුරක් මකා වෙනත් පිළිතුරක් ලකුණු කර තිබෙන්නට පුළුවන. එසේ මකන ලද අවස්ථාවකදී පැහැදිලිව මකා නොමැති නම් මකන ලද වරණය මත ද ඉරක් අඳින්න.

3. කවුළු පත්‍රය උත්තරපත්‍රය මත නිවැරදිව තබන්න. නිවැරදි පිළිතුර ✓ ලකුණකින් ද, වැරදි පිළිතුර 0 ලකුණකින් ද වරණ මත ලකුණු කරන්න. නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව ඒ ඒ වරණ තීරයට පහළින් ලියා දක්වන්න. අනතුරුව එම සංඛ්‍යා එකතු කර මුළු නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව අදාළ කොටුව තුළ ලියන්න.

**ව්‍යුහගත රචනා හා රචනා උත්තරපත්‍ර :**

1. අයදුම්කරුවන් විසින් උත්තරපත්‍රයේ හිස්ව තබා ඇති පිටු හරහා රේඛාවක් ඇඳ කපා හරින්න. වැරදි හෝ නුසුදුසු පිළිතුරු යටින් ඉරි අඳින්න. ලකුණු දිය හැකි ස්ථානවල හරි ලකුණු යෙදීමෙන් එය පෙන්වන්න.

2. ලකුණු සටහන් කිරීමේදී ඕවර්ලන්ඩ් කඩදාසියේ දකුණු පස තීරය යොදා ගත යුතු වේ.

3. සෑම ප්‍රශ්නයකටම දෙන මුළු ලකුණු උත්තරපත්‍රයේ මුල් පිටුවේ ඇති අදාළ කොටුව තුළ ප්‍රශ්න අංකය ඉදිරියෙන් අංක දෙකකින් ලියා දක්වන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස් අනුව ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීම කළ යුතුවේ. සියලු ම උත්තර ලකුණු කර ලකුණු මුල් පිටුවේ සටහන් කරන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස්වලට පටහැනිව වැඩි ප්‍රශ්න ගණනකට පිළිතුරු ලියා ඇත්නම් අඩු ලකුණු සහිත පිළිතුරු කපා ඉවත් කරන්න.

4. පරීක්ෂාකාරීව මුළු ලකුණු ගණන එකතු කොට මුල් පිටුවේ නියමිත ස්ථානයේ ලියන්න. උත්තරපත්‍රයේ සෑම උත්තරයකටම දී ඇති ලකුණු ගණන උත්තරපත්‍රයේ පිටු පෙරළමින් නැවත එකතු කරන්න. එම ලකුණ ඔබ විසින් මුල් පිටුවේ එකතුව ලෙස සටහන් කර ඇති මුළු ලකුණට සමාන දැයි නැවත පරීක්ෂා කර බලන්න.

**ලකුණු ලැයිස්තු සකස් කිරීම :**

මෙවර සියලු ම විෂයන්හි අවසාන ලකුණු ඇගයීම් මණ්ඩලය තුළදී ගණනය කරනු නොලැබේ. එබැවින් එක් එක් පත්‍රයට අදාළ අවසාන ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවලට ඇතුළත් කළ යුතු ය. I පත්‍රය සඳහා බහුවරණ පිළිතුරු පත්‍රයක් පමණක් ඇති විට ලකුණු ලැයිස්තුවට ලකුණු ඇතුළත් කිරීමෙන් පසු අකුරෙන් ලියන්න. අනෙකුත් උත්තරපත්‍ර සඳහා විස්තර ලකුණු ඇතුළත් කරන්න. 51 චිත්‍ර විෂයයේ I, II හා III පත්‍රවලට අදාළ ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවල ඇතුළත් කර අකුරෙන් ද ලිවිය යුතු වේ.

***

# නව නිර්දේශය

(***b***) $x^2 h = 4500.$

ඒ නයින්, $S = 2x^2 + 3xh$

$$= 2x^2 + 3x \cdot \frac{4500}{x^2} \quad ; \quad x > 0 \text{ සඳහා}$$ (5)

$$\therefore \quad \frac{dS}{dx} = 4x - 3 \times 4500 \left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4(x^3 - 3375)}{x^2}.$$ (5)

$\frac{dS}{dx} = 0$ (10) $\Leftrightarrow x = 15.$ (5)

$0 < x < 15$ සඳහා, $\frac{ds}{dr} < 0$ හා $x > 15$ සඳහා $\frac{ds}{dr} > 0.$ (5)

$\therefore$ $x = 15$ වන විට $S$ අවම වේ. (5)

**35**

---

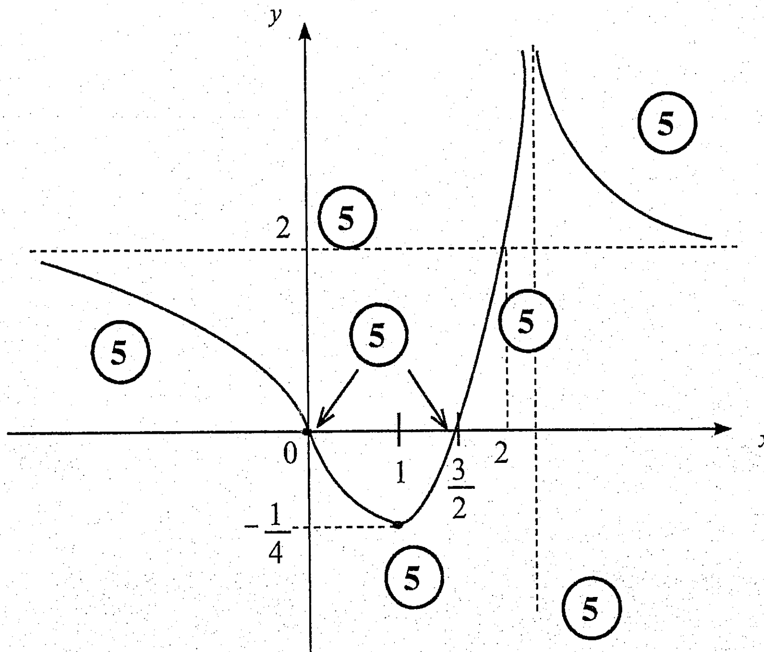
හැරුම් ලක්ෂ්‍යය : $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$ ස්ථානීය අවමයකි.

(5) **05**

---

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2 \quad \therefore\ y = 2$ (5)

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $x = 3$. (5)




**45**

---

$$\frac{1}{1+f(x)} \le \frac{1}{3}.$$

$1 + f(x) > 0$ වේ.

$\therefore 3 \le 1 + f(x)$.

$\therefore f(x) \ge 2$. (5)

$f(x) = 2 \iff x(2x-3) = 2(x-3)^2$. (5)

$\iff 2x^2 - 3x = 2(x^2 - 6x + 9)$

$\iff x = 2$ (5)

$x$ හි අවශ්‍ය අගයන් $2 \le x < 3$ හෝ $x > 3$. (5) **20**

---

**14.** (*a*) $x \neq 3$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 3$ සඳහා $f'(x) = \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

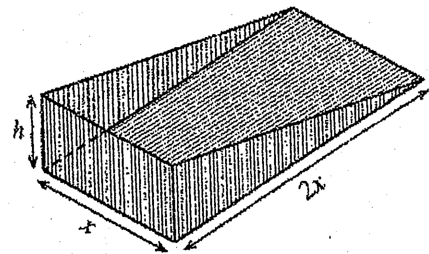
**ඒ නයින්,** $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා $x-$අන්තඃඛණ්ඩ දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, $\dfrac{1}{1+f(x)} \leq \dfrac{1}{3}$ අසමානතාව තෘප්ත කරන $x$ හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

(*b*) යාබද රූපයෙන් දූවිලි එකතු කරනයක මිට රහිත කොටස දැක්වේ. සෙන්ටිමීටරවලින් එහි මාන රූපයේ දැක්වේ. එහි පරිමාව $x^2h$ cm³ යන්න 4500 cm³ බව දී ඇත.
එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $S$ cm² යන්න $S = 2x^2 + 3xh$ මගින් දෙනු ලැබේ. $S$ අවම වන්නේ $x = 15$ වන විට බව පෙන්වන්න.




(*a*) $x \neq 3$ ; සඳහා $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$

එවිට, $f'(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}\left[2x-3+2x\right] - \dfrac{2x(2x-3)}{(x-3)^3}$ (20)

$= \dfrac{(x-3)(4x-3) - 2x(2x-3)}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{4x^2 - 15x + 9 - 4x^2 + 6x}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$. (5)

**25**

---

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$ (5)

| | $-\infty < x < 1$ | $1 < x < 3$ | $3 < x < \infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ හි ලකුණ | (−) | (+) | (−) |
| $f(x)$ | ↘ අඩුවේ. | ↗ වැඩිවේ. | ↘ අඩුවේ. |

(5) (5) (5)

**20**

$\therefore f(x)$ යන්න $[1, 3)$ මත වැඩි වන අතර $(-\infty, 1]$ හා $(3, \infty)$ මත අඩුවේ.

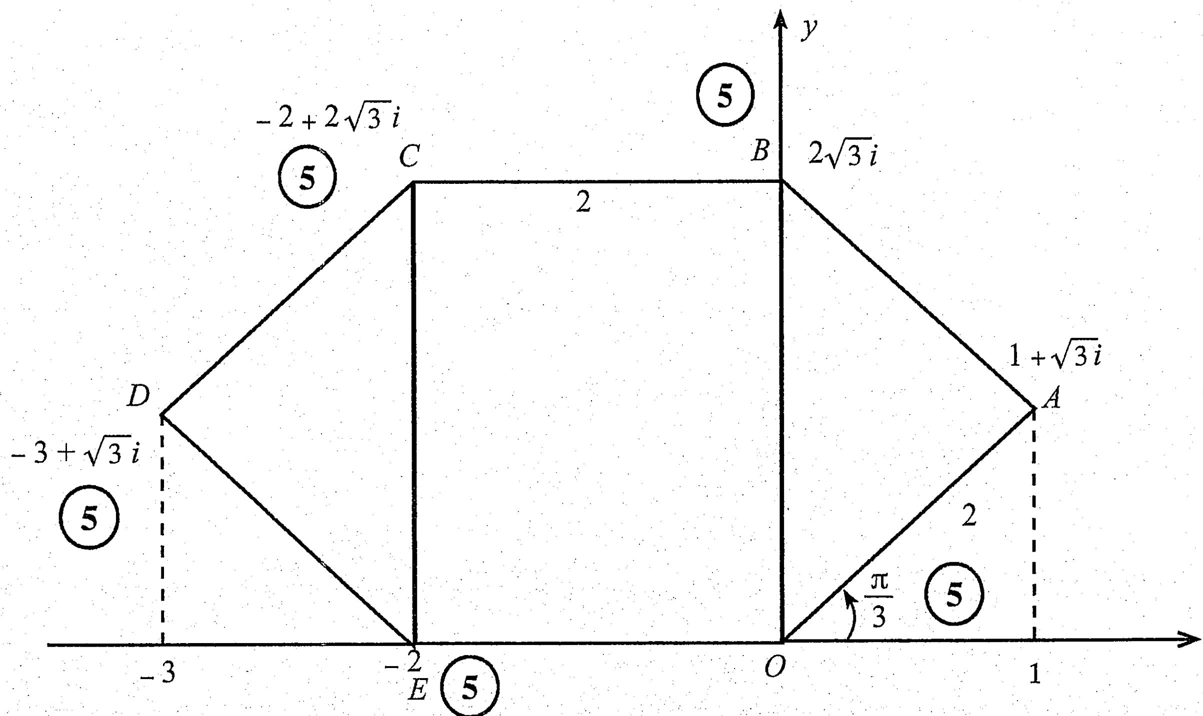
---

(c) $1+\sqrt{3}\,i = 2\left\{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ (5)

$= 2\left\{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right\}.$ (5)

**10**

---




**25**

---

$$|z-w|^2 = (z-w)\,(\overline{z-w})$$ (5)

$$= (z-w)\,(\bar{z}-\bar{w})$$ (5)

$$= z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w}$$

$$= |z|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) + |w|^2$$ (5)

$$= |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) + |w|^2 \longrightarrow (1)$$

**15**

---

$$|1-\bar{z}w|^2 = 1 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) + |z\bar{w}|^2 \longrightarrow (2)$$ (5)

(1) – (2) මගින්;

$$|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 1 - |z\bar{w}|^2$$

$$= -\,(1 - |w|^2 - |z|^2 + |z|^2|w|^2)$$ (5)

$$= -\,(1-|z|^2)(1-|w|^2) \longrightarrow (3)$$ (5)

**20**

---

$|w| = 1$, බැවින් (3) න් $|z-w|^2 - |1-\bar{z}w|^2 = 0$ ලැබේ. (5)

$\therefore\ |z-w| = |1-z\bar{w}|$.

ඒ නයින්, $\dfrac{|z-w|}{|1-z\bar{w}|} = 1.$ $\left[\begin{array}{l}\because z \neq w \\ \Rightarrow z\bar{w} \neq 1\end{array}\right]$

$\therefore\ \left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ (5)

**10**

---

$a = 1$, වන විට $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. (5)

$\therefore \; C^{-1} = \dfrac{1}{2-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. (5)

**10**

---

$CPC = 2I + C$

$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + C^{-1}C$ (5)

$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + I$

$\Leftrightarrow P = 2C^{-1}C^{-1} + C^{-1}$ (5)

$\therefore \; P = 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= 2\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (5)

$= \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ (5)

**20**

---

**(b)** $z = x + iy$ යැයි ගනිමු.

$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy)$ (5)

$= x^2 - i^2y^2$

$= x^2 + y^2$

$= |z|^2$

$\therefore \; |z|^2 = z\overline{z}$. (5)

**10**

---

**13.** (*a*) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{A}^T\mathbf{B}-\mathbf{I}=\mathbf{C}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

$\mathbf{C}^{-1}$ පවතින්නේ $a \neq 0$ ම **නම් පමණක්** බව ද පෙන්වන්න.

දැන්, $a=1$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{C}^{-1}$ ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{CPC}=2\mathbf{I}+\mathbf{C}$ වන පරිදි $\mathbf{P}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(*b*) $z, w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. $|z|^2=z\bar{z}$ බව පෙන්වා, එය $z-w$ ට යෙදීමෙන්

$|z-w|^2=|z|^2-2\,\mathrm{Re}\,z\bar{w}+|w|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|1-z\bar{w}|^2$ සඳහා ද එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වා, $|z-w|^2-|1-z\bar{w}|^2=-\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)$ බව පෙන්වන්න.

$|w|=1$ හා $z \neq w$ නම් $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right|=1$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $1+\sqrt{3}\,i$ යන්න $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r>0$ හා $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ වේ.
ආගන්ඩ් සටහනක, $O$ ලක්ෂ්‍යයෙන් මූලය ද $A$ ලක්ෂ්‍යයෙන් $1+\sqrt{3}\,i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ද නිරූපණය කරයි. $OABCDE$ යනු $O$ හා $A$ අනුයාත ශීර්ෂ ලෙස ඇතිව ශීර්ෂවල අනුපිළිවෙළ වාමාවර්ත අතට ගෙන ඇති සවිධි ෂඩස්‍රය යැයි ගනිමු. $B, C, D$ හා $E$ ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(*a*) $A^TB = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ (5)

$= \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix}$ (5)

$\therefore\ A^TB - \mathrm{I} = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5)

$= \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix} = C$ (5)

**20**

---

$C^{-1}$ පවතී $\Leftrightarrow |C| \neq 0$ (5)

$\Leftrightarrow 2a-a \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq 0$ (5)

**10**

---

7. $-\frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}$ සඳහා $x = 2t - \cos 2t$ හා $y = 1 - \sin 2t$ මගින් පරාමිතිකව $C$ වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ. $\frac{dy}{dx}$ යන්න $t$ ඇසුරෙන් සොයන්න.
$C$ වක්‍රයට එය මත $t = \frac{\pi}{12}$ ට අනුරූප ලක්ෂයයේ දී ඇඳි අභිලම්බ රේඛාවේ සමීකරණය $6\sqrt{3}\,x - 6y - \sqrt{3}\,\pi + 12 = 0$ බව පෙන්වන්න.

$x = 2t - \cos 2t, \quad y = 1 - \sin 2t$

$\frac{dx}{dt} = 2 + 2\sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = -2\cos 2t.$ (5)

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos 2t}{2 + 2\sin 2t} = -\frac{\cos 2t}{1 + \sin 2t}$ (5)

$t = \frac{\pi}{12}$ මගින් $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ හා $y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ලැබේ. (5)

අවශ්‍ය අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය $= \frac{1 + \sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}$

$= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$ (5)

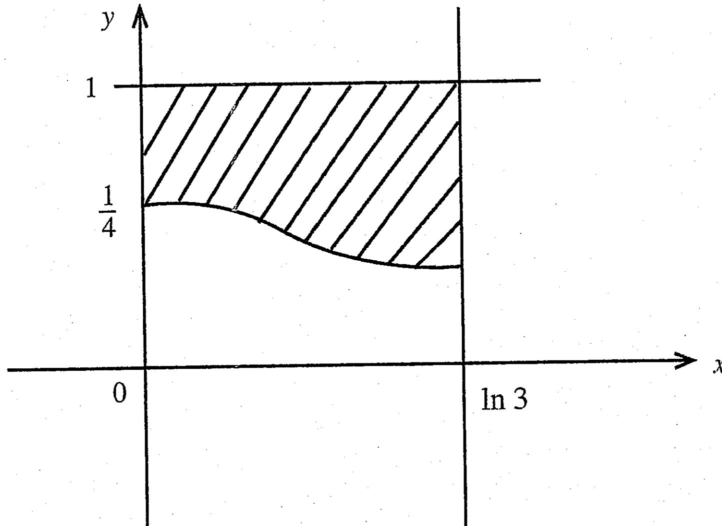
අවශ්‍ය සමීකරණය :

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

එනම්, $6\sqrt{3}\,x - 6y - \sqrt{3}\,\pi + 12 = 0.$ (5)

**25**

6. $y = \dfrac{e^{2x}}{(1+e^{x})^2}$, $x = 0$, $x = \ln 3$ හා $y = 1$ වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{1}{4}$ බව පෙන්වන්න.




(5)

අවශ්‍ය වර්ගඵලය $= \displaystyle\int_0^{\ln 3}\left\{1 - \frac{e^{2x}}{(1+e^{x})^2}\right\} dx$

$u = 1 + e^{x}.$

$= \ln 3 - \displaystyle\int_2^4 \frac{u-1}{u^2}\, du$ (5)

$= \ln 3 - \displaystyle\int_2^4 \left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right\} du$ (5)

$= \ln 3 - \left\{\ln|u| + \dfrac{1}{u}\right\}\Big|_2^4$ (5)

$= \ln 3 - \left\{\ln 4 - \ln 2 + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\right\}$

$= \ln 3 - \left\{\ln 2 - \dfrac{1}{4}\right\}$

$= \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{1}{4}.$ (5)

**25**

# පැරණි නිර්දේශය

විකල්ප ක්‍රමයක් :

$\tan(\alpha + \beta) = \tan\frac{\pi}{4}$ (5)

$\therefore \quad \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1$ (5)

$\therefore \ \cos^2 x + \sin x = 1 - \cos^2 x \sin x$ (5)

$1 - \sin^2 x + \sin x = 1 - (1 - \sin^2 x)\sin x$

$\sin x(1 - \sin x)(2 + \sin x) = 0$ (5)

$\Rightarrow \sin x = 1$ හෝ $\sin x = 0$ (5) $(\because \sin x \neq -2)$

$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$ (5) හෝ $x = m\pi; m \in \mathbb{Z}$. (5)

**35**

(a)(ii) මගින්, $\tan\alpha = \dfrac{\sin 20°}{\sqrt{3}\ \sin 20°} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ලැබේ. (5)

$\therefore\ \alpha = 30°$. (5) $(20° < \alpha < 90°)$

**10**

---

(c) $\tan^{-1}(\cos^2 x) + \tan^{-1}(\sin x) = \dfrac{\pi}{4}$.

$\alpha = \tan^{-1}(\cos^2 x)$ හා $\beta = \tan^{-1}(\sin x)$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\alpha = \dfrac{\pi}{4} - \beta$.

$\therefore \tan\alpha = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \beta\right)$ (5)

$= \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\beta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\ \tan\beta}$. (5)

$\Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$. (5)

$\cos^2 x\ (1 + \sin x) = (1 - \sin x)$

$(1 - \sin^2 x)(1 + \sin x) = (1 - \sin x)$ (5)

$(1 - \sin x)(1 + \sin x)^2 = 1 - \sin x$

$\Rightarrow \sin x = 1$ හෝ $1 + \sin x = \pm 1$

$\Rightarrow \sin x = 1$ හෝ $\sin x = 0$ (5) $(\because \sin x \neq -2)$

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}$ (5) හෝ $m \in \mathbb{Z}$ සඳහා $x = m\pi$ (5)

**35**

---

**(b)** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, (5) + (5)

මෙහි $BC = a, CA = b$ හා $AB = c$. **10**

---

සයින් නීතිය භාවිතයෙන් :

$ABD$ ත්‍රිකෝණය සඳහා ; $\dfrac{AB}{\sin \alpha} = \dfrac{AD}{\sin 80^\circ}$. (10)

$ADC$ ත්‍රිකෝණය සඳහා ; $\dfrac{DC}{\sin(\alpha - 20^\circ)} = \dfrac{AD}{\sin 20^\circ}$. (10)

$\therefore \quad \dfrac{\sin(\alpha - 20^\circ)}{\sin \alpha} = \dfrac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}$.

$\therefore \quad \sin 80^\circ \sin(\alpha - 20^\circ) = \sin 20^\circ \sin \alpha$. (5)

**25**

---

$\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ$ (5) (5)

දැන්, $\sin 80^\circ \sin(\alpha - 20^\circ) = \sin 20^\circ \sin \alpha$ මගින්,

$\cos 10^\circ \sin(\alpha - 20^\circ) = 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ \sin \alpha$ දෙනු ලැබේ. (5) (5)

$\therefore \sin\alpha \cos 20^\circ - \cos\alpha \sin 20^\circ = 2 \sin 10^\circ \sin \alpha$. (5)

$\therefore \tan \alpha(\cos 20^\circ - 2 \sin 10^\circ) = \sin 20^\circ$ (5) හා ඒ නයින්, $\tan \alpha = \dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - 2 \sin 10^\circ}$. (5)

**35**

---

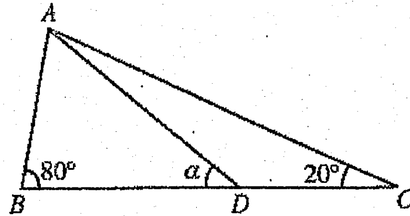
**17.** ($a$) $\sin A, \cos A, \sin B$ හා $\cos B$ ඇසුරෙන් $\sin(A-B)$ ලියා දක්වන්න.

(i) $\sin(90°-\theta) = \cos\theta$, හා

(ii) $2\sin 10° = \cos 20° - \sqrt{3}\sin 20°$

බව **අපෝහනය** කරන්න.

($b$) සුපුරුදු අංකනයෙන්, $ABC$ ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.




රූපයේ දක්වා ඇති $ABC$ ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C = 80°$ හා $A\hat{C}B = 20°$ වේ. $D$ ලක්ෂ්‍යය $BC$ මත පිහිටා ඇත්තේ $AB = DC$ වන පරිදි ය. $A\hat{D}B = \alpha$ යැයි ගනිමු.

සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා **සයින් නීතිය** භාවිතයෙන්, $\sin 80° \sin(\alpha - 20°) = \sin 20° \sin\alpha$ බව පෙන්වන්න.

$\sin 80° = \cos 10°$ වන්නේ ඇයිදැයි පැහැදිලි කර, **ඒ නයින්**, $\tan\alpha = \dfrac{\sin 20°}{\cos 20° - 2\sin 10°}$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත ($a$)(ii) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $\alpha = 30°$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

($c$) $\tan^{-1}(\cos^2 x) + \tan^{-1}(\sin x) = \dfrac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

---

**($a$)** $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A \sin B$. (10)

**10**

---

**(i)** $\sin(90° - \theta) = \sin 90° \cos\theta - \cos 90° \sin\theta$ (5)

$= \cos\theta$. (5)  ($\because \sin 90° = 1$ හා $\cos 90° = 0$.)

**10**

---

**(ii)** $2\sin 10° = 2\sin(30° - 20°)$ (5)

$= 2\sin 30°\cos 20° - 2\cos 30°\sin 20°$ (5)

$= \cos 20° - \sqrt{3}\sin 20°$. (5)  ($\because \sin 30° = \dfrac{1}{2}$ හා $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ )

**15**

---

$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = 2(-3)(-2) + 2(-3)\left(-\frac{5}{2}\right) = 27.$ (5)

(5) (5)

$c_1 + c_2 = \frac{31}{2} + 9 = \frac{49}{2}.$ (5)

$\therefore\ 2g_1g_2 + 2f_1f_2 \neq c_1 + c_2.$ (5)

$\therefore\ C_1$ හා $C_2$ ප්‍රලම්බ ඡේදනය නොවේ. (5)

**30**

---

$l_1 : y-2 = 3(x-1)$ හා $l_2 : y-2 = -\frac{1}{3}(x-1)$.

$l_1 : 3x - y - 1 = 0$ (5) හා $l_2 : x + 3y - 7 = 0$. (5)

**40**

---

$l : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = t$ (යැයි ගනිමු). (5)

එවිට, $x = 1+2t$, $y = 2+t$, මෙහි $t \in \mathbb{R}$. (5)

**10**

---

$C_1$ සඳහා

$P \equiv (1+2t, 2+t)$ සිට $l_1$ ට ලම්බ දුර $C_1$ හි අරයට සමාන වේ.

එනම්, $\frac{|3(1+2t)-(2+t)-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$ (10) $= \frac{\sqrt{10}}{2}$. (5)

එනම්, $|3+6t-2-t-1| = 5$. (5)

$|5t| = 5$.

$t = \pm 1$ (5)

$P \equiv (3, 3) = B$, බැවින් $P \equiv (-1, 1)$ සුදුසු නොවේ.
(5) (5)

$C_1 : (x-3)^2 + (y-3)^2 = \frac{5}{2}$. (5)

එනම්, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 18 = \frac{5}{2}$

එනම්, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + \frac{31}{2} = 0$ (5)

**45**

---

$C_2$ හි සමීකරණය

$(x-1)(x-3) + (y-2)(y-3) = 0$. (15)

| කේන්ද්‍රය (5), අරය (5), සමීකරණය (5) |
|---|

**15**

---

16. $A \equiv (1, 2)$ හා $B \equiv (3, 3)$ යැයි ගනිමු.

$A$ හා $B$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන $l$ සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

එක එකක් $l$ සමග $\frac{\pi}{4}$ ක සුළු කෝණයක් සාදමින් $A$ හරහා යන $l_1$ හා $l_2$ සරල රේඛා

$l$ මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(1 + 2t, 2 + t)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙ

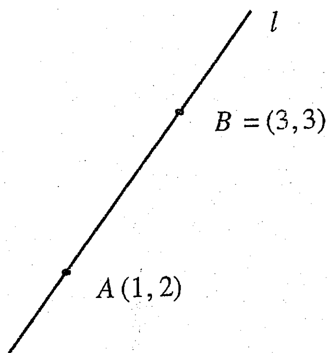
$l_1$ හා $l_2$ යන දෙකම ස්පර්ශ කරන හා කේන්ද්‍රය $l$ මත වූ මුළුමනින්ම පළමුවන

අරය $\frac{\sqrt{10}}{2}$ වන, $C_1$ වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 - 6x - 6y + \frac{31}{2} = 0$ බව ද පෙන්

විෂ්කම්භයක අන්ත $A$ හා $B$ වූ $C_2$ වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

$C_1$ හා $C_2$ වෘත්ත ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

**(16)**




අනුක්‍රමණය $= \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$ · (5)

$l$ හි සමීකරණය : $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$. (5)

මෙය $x - 2y + 3 = 0$ වේ.

**10**

---

$$\tan\frac{\pi}{4} = \left| \frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m} \right|$$ (10)

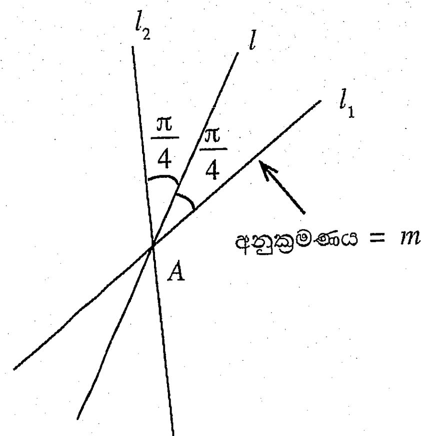
$$\therefore \quad 1 = \left| \frac{2m - 1}{2 + m} \right|$$ (5)

$\Leftrightarrow \quad 2 + m = \pm(2m - 1)$ (5)

$\Leftrightarrow \quad 2 + m = 2m - 1$ හෝ $2 + m = -2m + 1$

$\Leftrightarrow \quad m = 3$ හෝ $m = -\frac{1}{3}$.

(5) (5)



(c) $I = \int_0^{\pi} x\cos^6 x \sin^3 x \, dx$

$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \underbrace{\cos^6(\pi - x)}_{\cos^6 x} \underbrace{\sin^3(\pi - x)}_{\sin^3 x} dx = \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos^6 x \sin^3 x$ (5) (5)

$= \pi \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx - \underbrace{\int_0^{\pi} x\cos^6 x \sin^3 x \, dx}_{I}$ . (5)

$\therefore I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx$ . (5)

**20**

---

$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx$

$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^2 x \sin x \, dx$

$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$ (5)

$= \frac{\pi}{2} \left[ \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin x \, dx - \int_0^{\pi} \cos^8 x \sin x \, dx \right]$ (5)

$= \frac{\pi}{2} \left[ \left. \frac{-\cos^7 x}{7} \right|_0^{\pi} + \left. \frac{\cos^9 x}{9} \right|_0^{\pi} \right]$ (5) (5)

$= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2}{7} - \frac{2}{9} \right]$ (5)

$= \frac{2\pi}{63}$ .

**25**

---

**(b)** $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^x (1 - \cos 2\pi x)\, dx$ (5)

$\displaystyle = \frac{1}{2} e^x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 e^x \cos 2\pi x \, dx}_{I}$ (5)

$\displaystyle = \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2} I .$ (5) ——— ①

දැන්, $\displaystyle I = \int_0^1 e^x \cos 2\pi x \, dx$

$\displaystyle = \underbrace{e^x \frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\Big|_0^1}_{} - \frac{1}{2\pi}\int_0^1 e^x \sin 2\pi x \, dx$ (5) (5)

$\displaystyle = 0 - \frac{1}{2\pi}\left[\left(-e^x \frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^1 e^x \cos 2\pi x \, dx}_{I}\right]$ (5) (5)

$\displaystyle = \frac{1}{4\pi^2}\left[e - 1\right] - \frac{1}{4\pi^2} I .$ (5) (5)

$\displaystyle \therefore I \left(1 + \frac{1}{4\pi^2}\right) = \frac{1}{4\pi^2}(e-1).$

$\displaystyle \therefore I = \frac{(e-1)}{4\pi^2 + 1} .$ (5)

$\therefore$ ① න්, $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x \, dx = \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2}\frac{(e-1)}{(4\pi^2+1)}$ (5) + (5)

$\displaystyle = \frac{(e-1)}{2}\left[\frac{4\pi^2}{4\pi^2+1}\right]$

$\displaystyle = \frac{2(e-1)\pi^2}{1 + 4\pi^2} .$

**60**

**15.** (*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + B(x^2+9) + 2(x+1)^2$

වන පරිදි $A$ හා $B$ නියත පවතින බව දී ඇත.

$A$ හා $B$ හි අගයන් සොයන්න.

**ඒ නයින්,** $\dfrac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා,

$\displaystyle\int \frac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x\,dx$ අගයන්න.

(*c*) $a$ නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\displaystyle\int_0^\pi x\cos^6 x \sin^3 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos^6 x \sin^3 x\,dx$ බව පෙන්වන්න.

**ඒ නයින්,** $\displaystyle\int_0^\pi x\cos^6 x \sin^3 x\,dx = \frac{2\pi}{63}$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$

$x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + B(x^2+9) + 2(x+1)^2$

$x$ හි බලවල සංගුණක සැසඳූ විට ;

$x^3$ : $1 = A$. (5)

$x^0$ : $-16 = 9A + 9B + 2 \Rightarrow B = -3$. (5) (5)

**විකල්ප ක්‍රමයක්:**

ආදේශයෙන්

$x = -1$ : $-30 = 10B \Rightarrow B = -3$

$x = 0$ : $-16 = 9A + 9B + 2 \Rightarrow A$

**15**

---

$\therefore \dfrac{x^2+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)} = \dfrac{1}{(x+1)} - \dfrac{3}{(x+1)^2} + \dfrac{2}{x^2+9}$ . (10)

$\displaystyle\int \frac{x^2+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - 3\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$

$= \ln|x+1| + \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{3}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{3}\right) + C$ . (5)

(5) (5) (5)

**30**

---

(*b*) $x^2 h = 4500.$

ඒ නයින්, $S = 2x^2 + 3xh$

$$= 2x^2 + 3x \cdot \frac{4500}{x^2} \quad ; \quad x > 0 \text{ සඳහා}$$

(5)

$$\therefore \frac{dS}{dx} = 4x - 3 \times 4500 \left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4(x^3 - 3375)}{x^2}.$$

(5)

$\frac{dS}{dx} = 0$ (10) $\Leftrightarrow x = 15.$ (5)

$0 < x < 15$ සඳහා, $\frac{ds}{dr} < 0$ හා $x > 15$ සඳහා $\frac{ds}{dr} > 0.$ (5)

$\therefore x = 15$ වන විට $S$ අවම වේ. (5)

**35**

---

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය : $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$ අවමයක් වේ. (5)

**05**

---

$x \neq 3$ ; සඳහා $f''(x) = \frac{18x}{(x-3)^4}$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ (5)

| | $-\infty < x < 0$ | $0 < x < 3$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ හි ලකුණ | $(-)$ | $(+)$ |
| අවතලභාවය | පහලට අවතල වේ. (5) | ඉහලට අවතල වේ. (5) |

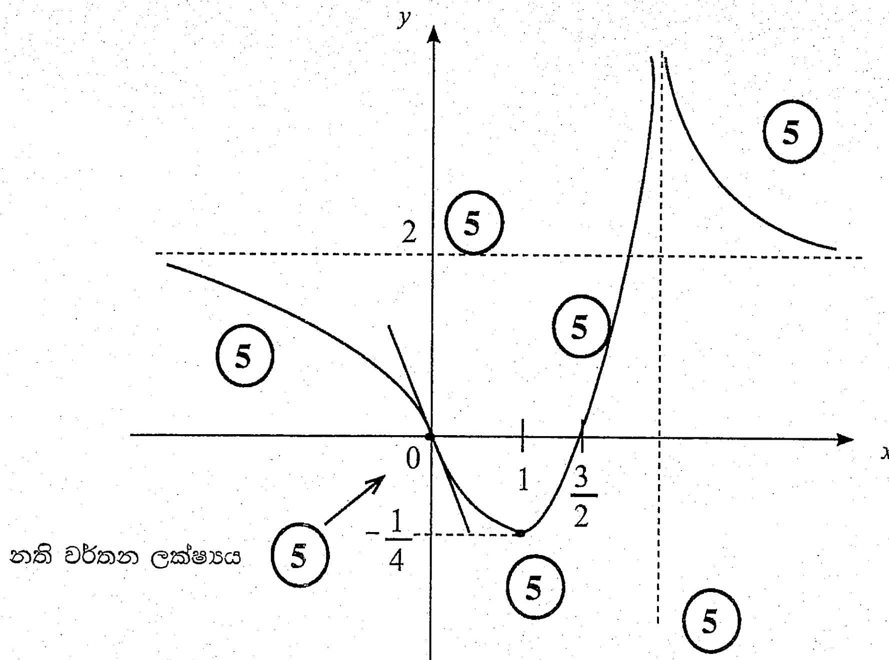
$\therefore$ නති වර්තන ලක්ෂ්‍යය = (0, 0). (5)

**20**

---

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2 \quad \therefore \; y = 2$ (5)

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $x = 3.$ (5)




**45**

---

**14.** (*a*) $x \neq 3$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 3$ සඳහා $f'(x) = \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

**ඒ නයින්,** $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

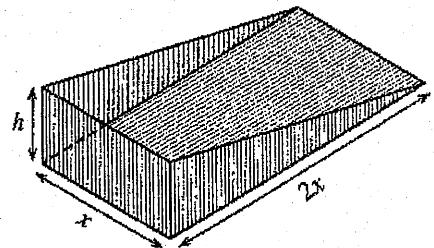
$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

$x \neq 3$ සඳහා $f''(x) = \dfrac{18x}{(x-3)^4}$ බව දී ඇත.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) යාබද රූපයෙන් දූවිලි එකතු කරනයක මිට රහිත කොටස දැක්වේ. සෙන්ටිමීටරවලින් එහි මාන රූපයේ දැක්වේ. එහි පරිමාව $x^2h$ cm$^3$ යන්න 4500 cm$^3$ බව දී ඇත.
එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $S$ cm$^2$ යන්න $S = 2x^2 + 3xh$ මගින් දෙනු ලැබේ. $S$ අවම වන්නේ $x = 15$ වන විට බව පෙන්වන්න.




(*a*) $x \neq 3$ ; සඳහා $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$

එවිට, $f'(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}\left[2x-3+2x\right] - \dfrac{2x(2x-3)}{(x-3)^3}$ (20)

$= \dfrac{(x-3)(4x-3) - 2x(2x-3)}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{4x^2 - 15x + 9 - 4x^2 + 6x}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$. (5)

**25**

---

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. (5)

| | $-\infty < x < 1$ | $1 < x < 3$ | $3 < x < \infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ හි ලකුණ | (−) | (+) | (−) |
| $f(x)$ is | ↘ අඩුවේ. | ↗ වැඩිවේ. | ↘ අඩුවේ. |
| | (5) | (5) | (5) |

$\therefore f(x)$ යන්න $[1, 3)$ මත වැඩි වන අතර $(-\infty, 1]$ හා $(3, \infty)$ මත අඩුවේ.

**20**

---

(c) $1+\sqrt{3}\,i = 2\left\{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ (5)

$= 2\left\{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right\}$ (5)

**10**

---

$(1+\sqrt{3}\,i)^m\,(1-\sqrt{3}\,i)^n = 2^m\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^m 2^n\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^n$ (5)

$= 2^{m+n}\left(\cos\frac{m\pi}{3} + i\sin\frac{m\pi}{3}\right)\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right)$ (5)

$= 2^{m+n}\left(\cos(m-n)\frac{\pi}{3} + i\sin(m-n)\frac{\pi}{3}\right)$ (5)

$\therefore\ 2^{m+n}\left(\cos(m-n)\frac{\pi}{3} + i\sin(m-n)\frac{\pi}{3}\right) = 2^8$

$\Rightarrow m+n=8$ හා $(m-n)\ \frac{\pi}{3} = 2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}.$

(5) (5)

**25**

---

$|z-w|^2 = (z-w)\,\overline{(z-w)}$ (5)

$= (z-w)\,(\bar{z}-\bar{w})$ (5)

$= z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w}$

$= |z|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) + |w|^2$ (5)

$= |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) + |w|^2 \longrightarrow$ (1)

**15**

---

$|1-\bar{z}w|^2 = 1 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) + |z\bar{w}|^2 \longrightarrow$ (2) (5)

(1) – (2) මගින්;

$|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 1 - |z\bar{w}|^2$ ලැබේ. (5)

$= -(1 - |w|^2 - |z|^2 + |z|^2|w|^2)$ (5)

$= -(1-|z|^2)(1-|w|^2)$ (5) $\longrightarrow$ (3)

**20**

---

$|w| = 1$, බැවින් (3) න් $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = 0$ ලැබේ. (5)

$\therefore\ |z-w| = |1-z\bar{w}|$.

ඒ නයින්, $\dfrac{|z-w|}{|1-z\bar{w}|} = 1$. $\left[\begin{array}{l}\because z \neq w \\ \Rightarrow z\bar{w} \neq 1\end{array}\right]$

$\therefore\ \left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ (5)

**10**

---

$a = 1$ වන විට $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. (5)

$\therefore \quad C^{-1} = \frac{1}{2-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. (5)

**10**

---

$CPC = 2I + C$

$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + C^{-1}C$ (5)

$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + I$

$\Leftrightarrow P = 2C^{-1}C^{-1} + C^{-1}$ (5)

$\therefore \quad P = 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= 2\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (5)

$= \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ (5)

**20**

---

**(b)** $z = x + iy$ යැයි ගනිමු.

$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy)$ (5)

$= x^2 - i^2y^2$

$= x^2 + y^2$

$= |z|^2$

$\therefore \quad |z|^2 = z\bar{z}$. (5)

**10**

---

**13.** (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{A}^T\mathbf{B} - \mathbf{I} = \mathbf{C}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

$\mathbf{C}^{-1}$ පවතින්නේ $a \neq 0$ **ම නම් පමණක්** බව ද පෙන්වන්න.

දැන්, $a = 1$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{C}^{-1}$ ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{CPC} = 2\mathbf{I} + \mathbf{C}$ වන පරිදි $\mathbf{P}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(*b*) $z, w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. $|z|^2 = z\bar{z}$ බව පෙන්වා, එය $z - w$ ට යෙදීමෙන්

$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\text{Re}\, z\bar{w} + |w|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|1 - z\bar{w}|^2$ සඳහා ද එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වා, $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = -\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)$ බව පෙන්වන්න.

$|w| = 1$ හා $z \neq w$ නම් $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $1+\sqrt{3}i$ යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ වේ.

$(1+\sqrt{3}i)^m(1-\sqrt{3}i)^n = 2^8$ බව දී ඇත; මෙහි $m$ හා $n$ ධන නිඛිල වේ.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්, $m$ හා $n$ හි අගයන් නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබා ගන්න.

(*a*) $A^TB = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ (5)

$= \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix}$ (5)

$\therefore\ A^TB - \mathrm{I} = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5)

$= \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix} = C$ (5)

**20**

---

$C^{-1}$ පවතී $\Leftrightarrow |C| \neq 0$ (5)

$\Leftrightarrow 2a - a \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq 0$ (5)

**10**

---

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} W_r = \lim_{n\to\infty} U_{n+1} - U_1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r$$

$$= 0 - \frac{1}{6} - 1 \quad (5)$$

$$= -\frac{7}{6}.$$

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අභිසාරී වන අතර ඓක්‍යය $-\frac{7}{6}$ වේ. (5)

**10**

---

$$U_r = V_r - V_{r+1}$$

$r = 1;\quad U_1 = V_1 - V_2$

$r = 2;\quad U_2 = V_2 - V_3$  ⑤

$\vdots \quad \vdots$

$r = n-1;\quad U_{n-1} = V_{n-1} - V_n$

$r = n;\quad U_n = V_n - V_{n+1}$  ⑤

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = V_1 - V_{n+1} \quad ⑤$$

$$= 1 - \left(\frac{4}{(n+2)} - \frac{1}{(n+1)}\right) \quad ⑤$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}. \quad ⑤$$

**25**

---

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\right\} \quad ⑤$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{(1+\frac{1}{n})\ (1+\frac{2}{n})}\right\}$$

$$= 1. \quad ⑤$$

එමනිසා $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේඪීය අභිසාරී වන අතර ඓක්‍යය 1 වේ. ⑤

**15**

---

$$W_r = U_{r+1} - 2U_r$$

$$\sum_{r=1}^{n} W_r = \sum_{r=1}^{n} (U_{r+1} - 2U_r)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} U_r - U_1 + U_{n+1} - 2\sum_{r=1}^{n} U_r \quad ⑤$$

$$= U_{n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{n} U_r. \quad ⑤$$

**10**

---

| P | G | FS | MS | ආකාර ගණන |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 2 | 3 | (10) $^5C_2\ ^5C_4\ ^3C_2\ ^7C_3 = 5250$ (5) |
| 2 | 5 | 2 | 2 | (10) $^5C_2\ ^5C_5\ ^3C_2\ ^7C_2 = 630$ (5) |

අවශ්‍ය ආකාර ගණන $= 5250 + 630$

$= 5880$ (5)

**35**

---

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$U_r = \frac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} \quad \text{හා} \quad V_r = \frac{A}{(r+1)} - \frac{B}{r}.$$

එබැවින්, $U_r = V_r - V_{r+1}$ මගින් $\dfrac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} = \dfrac{A}{r+1} - \dfrac{B}{r} - \dfrac{A}{r+2} + \dfrac{B}{r+1}$ ලැබේ. (5)

$$\therefore \frac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} = \frac{A}{(r+1)(r+2)} - \frac{B}{r(r+1)} \text{ හා}$$

ඒ නයින්, $3r-2 = Ar - B(r+2)$ $\quad r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

(5)

$r$ හි බලවල සංගුණක සැසඳීමෙන්:

$r^1: \quad 3 = A - B$

$r^0: \quad -2 = -2B$

$A = 4$ (5)

$B = 1$ (5)

**20**

---

**12.** (*a*) පියානෝ වාදකයින් පස්දෙනකු, ගිටාර් වාදකයින් පස්දෙනකු, ගායිකාවන් තුන්දෙනකු හා ගායකයින් හත්දෙනකු අතුරෙන් **හරියටම** පියානෝ වාදකයින් දෙදෙනකු ද **අඩු තරමින්** ගිටාර් වාදකයින් හතරදෙනකු ද ඇතුළත් වන පරිදි සාමාජිකයන් එකොළොස්දෙනකුගෙන් සමන්විත සංගීත කණ්ඩායමක් තෝරා ගැනීමට අවශ්‍යව ඇත. තෝරා ගත හැකි එවැනි වෙනස් සංගීත කණ්ඩායම් ගණන සොයන්න.

මේවා අතුරෙන් හරියටම ගායිකාවන් දෙදෙනකු සිටින සංගීත කණ්ඩායම් ගණන ද සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{3r-2}{r(r+1)(r+2)}$ හා $V_r = \dfrac{A}{r+1} - \dfrac{B}{r}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $A, B \in \mathbb{R}$ වේ.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = V_r - V_{r+1}$ වන පරිදි $A$ හා $B$ හි අගයන් සොයන්න.

**ඒ නයින්,** $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

දැන්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $W_r = U_{r+1} - 2U_r$ යැයි ගනිමු. $\sum_{r=1}^{n} W_r = U_{n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{n} U_r$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

**12.** (*a*) $P$ = පියානෝ වාදකයින් (5), $G$ = ගිටාර් වාදකයින් (5), ගායකයින් (10)

$FS$ – ගායිකාවන් (3)

$MS$ – ගායකයන් (7)

| P | G | S | ආකාර ගණන |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 5 | (10) $^5C_2\ ^5C_4\ ^{10}C_5 = 12600$ (5) |
| 2 | 5 | 4 | (10) $^5C_2\ ^5C_5\ ^{10}C_4 = 2100$ (5) |

අවශ්‍ය ආකාර ගණන $= 12600 + 2100$

$= 14700$ (5)

**35**

**(b)** $(x^2-1)$ යන්න $h(x)$ හි සාධකයක් වන බැවින්,

$(x-1)$ හා $(x+1)$ යන දෙකම $h(x)$ හි සාධක වේ.

සාධක ප්‍රමේයය අනුව $h(1)=0$ හා $h(-1)=0$ වේ. (5)

$h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$

$\therefore h(1) = 1 + a + b + c = 0$ —— (1) (5) හා $h(-1) = -1 + a - b + c = 0$ —— (2) (5) වේ.

(1) − (2) මගින් $2+2b = 0$ ලැබේ.

$\therefore \; b = -1.$ (5)

**20**

---

$h(x) = p(x).(x^2-2x) + 5x + k$ (5)

$h(0) = k.$ (5)

$\therefore \; k = c.$

$h(2) = 8 + 4a + 2(-1) + c = 10 + k$ (5)

$4a + c = 4 + k$

$a = 1$ (5)

(1) + (2), මගින් $a = -c$ ලැබේ.

$\therefore c = -1.$

එනයින්, $k = -1.$ (5)

**25**

---

$h(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

$= (x+1)x^2 - (x+1)$

$= (x+1)\,(x^2-1)$ (5)

$= (x+1)^2\,(x-1).$ (5)

$(\lambda = -1\;,\; \mu = 1.)$

**10**

---

**(ii)** $\Delta = p^2 - 4c.$ (5)

$= p^2 + 4(q-p)\ (q-2p)$ (5)

$= p^2 + 4[q^2 - 3pq + 2p^2]$

$= 9p^2 - 12pq + 4p^2$

$= (3p-2q)^2.$ (5)

**15**

---

$\alpha + \beta = -p.$ (5)

$\alpha + \gamma = -\frac{q}{2}.$ (5)

$\therefore \beta - 2\gamma = -p - \alpha + q + 2\alpha$

$= -p + q + \alpha$

$= 0.$ (5)　　$(\because\ \alpha = p - q)$

$\therefore \beta = 2\gamma$

විකල්ප ක්‍රමයක්

$\alpha\beta = c$ (5)

$\alpha r = \frac{c}{2}$ (5)

එබැවින් $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ වන බැවින්,

$\frac{\beta}{\gamma} = 2$ (5)

$\beta = 2\gamma$

**15**

---

අවශ්‍ය සමීකරණය $(x-\beta)\ (x-\gamma) = 0$ වේ.

මෙය $x^2 - (\beta+\gamma)\,x + \gamma\beta = 0$ ලබා දෙයි. (10)

තවද, $\beta + \gamma = -p - \frac{q}{2} - 2\alpha = -p - \frac{q}{2} - (2p-2q) = \frac{3}{2}\ (q-2p).$ (5)

දැන්, $\alpha^2\beta\gamma = \frac{c^2}{2}.$

$\therefore\ \beta\gamma = \frac{c^2}{2(p-q)^2} = \frac{(q-p)^2(q-2p)^2}{2(p-q)^2} = \frac{1}{2}\ (q-2p)^2.$ (5)

$x^2 - \frac{3}{2}\ (q-2p)\,x + \frac{1}{2}\ (q-2p)^2 = 0.$ (5)

$2x^2 + 3(2p-q)\,x + (2p-q)^2 = 0.$

**25**

---

**11.** (a) $f(x) = x^2 + px + c$ හා $g(x) = 2x^2 + qx + c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q \in \mathbb{R}$ හා $c > 0$ වේ. $f(x) = 0$ හා $g(x) = 0$ සඳහා $\alpha$ පොදු මූලයක් ඇති බව දී ඇත. $\alpha = p - q$ බව පෙන්වන්න.

$p$ හා $q$ ඇසුරෙන් $c$ සොයා,

(i) $p > 0$ නම් $p < q < 2p$ බව,

(ii) $f(x) = 0$ හි විවේචකය $(3p - 2q)^2$ බව

**අපෝහනය** කරන්න.

$\beta$ හා $\gamma$ යනු පිළිවෙළින් $f(x) = 0$ හි හා $g(x) = 0$ හි අනික් මූල යැයි ගනිමු. $\beta = 2\gamma$ බව පෙන්වන්න.

තව ද $\beta$ හා $\gamma$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $2x^2 + 3(2p - q)x + (2p - q)^2 = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(b) $h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b, c \in \mathbb{R}$ වේ. $x^2 - 1$ යන්න $h(x)$ හි සාධකයක් බව දී ඇත. $b = -1$ බව පෙන්වන්න.

$h(x)$ යන්න $x^2 - 2x$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $5x + k$ බව ද දී ඇත; මෙහි $k \in \mathbb{R}$ වේ. $k$ හි අගය සොයා $h(x)$ යන්න $(x - \lambda)^2 (x - \mu)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ වේ.

---

(a) $\alpha$ යනු $f(x) = 0$ හා $g(x) = 0$ හි පොදු මූලයක් බැවින්

$\alpha^2 + p\alpha + c = 0$ —— (1) හා (5) $2\alpha^2 + q\alpha + c = 0$ වේ. (5)

$\therefore \ \alpha^2 + (q - p)\alpha = 0$ (5) හා එබැවින් $\alpha[\alpha - (p - q)] = 0$ වේ.

ඒනයින්, $\alpha = p - q$. (5) $(\because \ c > 0 \Rightarrow \alpha \neq 0)$

**20**

---

(1) $\Rightarrow c = -\alpha(\alpha + p)$ (5)

$= -(p - q)(2p - q)$ (5) ($\alpha$ සඳහා ආදේශයෙන්

$= -(q - p)(q - 2p)$.

**10**

---

**(i)** $c > 0, \Rightarrow (q - p)(q - 2p) < 0.$ (5)

$\therefore$ $p$ හා $2p$ අතර $q$ පිහිටයි.

$p > 0$ නම් $p < 2p$ වන බැවින් $p < q < 2p$ වේ. (5)

**10**

---

**10.** $n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු.
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ සර්වසාම්‍යය භාවිතයෙන්, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ බව පෙන්වන්න.
$\sec\theta + \tan\theta = \frac{4}{3}$ බව දී ඇත. $\sec\theta - \tan\theta = \frac{3}{4}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.
**ඒ නයින්**, $\cos\theta = \frac{24}{25}$ බව පෙන්වන්න.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ---------------- (1)

$\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ යන්න $\cos^2\theta \neq 0$ ලබා දෙයි.

ඒ නයින්, (1) න්, $1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$ ලැබේ. (5)

$\therefore \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$. (5)

දැන්, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ මගින්

$(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$ ලබා දෙයි. (5)

එබැවින් $\sec\theta + \tan\theta = \frac{4}{3}$, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{3}{4}$. (5)

$\therefore 2\sec\theta = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$.

$\therefore \cos\theta = \frac{24}{25}$. (5)

**25**

**9.** කේන්ද්‍රය $(-2, 0)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි තිබෙන හා $(-1, \sqrt{3})$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන $S$ වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. $A \equiv (1, -1)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.
**ඒ නයින්,** $A$ සිට $S$ ට ඇඳි ස්පර්ශකයන්හි ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යවල $x$–ඛණ්ඩාංක $5x^2 + 8x + 2 = 0$ සමීකරණය තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.

$S: (x+2)^2 + y^2 = r^2$ (5)

මෙය $(-1, \sqrt{3})$ හරහා යයි.

$\therefore \; 1 + 3 = r^2.$

$\therefore \; 4 = r^2.$

ඒ නයින් $S$ හි සමීකරණය $(x+2)^2 + y^2 = 4.$ (5)

එනම් $x^2 + y^2 + 4x = 0.$ ---------------- (1)

$A \equiv (1, -1)$ සිට $S$ ට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යාය $x - y + 2(x+1) = 0$ වේ. (5)

එනම්, $3x - y + 2 = 0.$

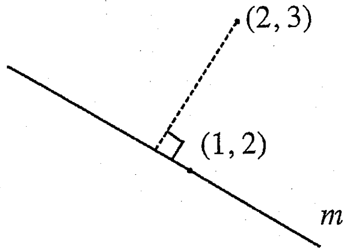
ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය සඳහා $y = 3x + 2,$ (1) හි ආදේශ කරමු. (5)

එවිට, $x^2 + (3x+2)^2 + 4x = 0.$

ඒ නයින්, $10x^2 + 12x + 4 + 4x = 0$ හා එබැවින් $5x^2 + 8x + 2 = 0$ වේ. (5)

**25**

**8.** $m \in \mathbb{R}$ හා $l$ යනු $A \equiv (1, 2)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන අනුක්‍රමණය $m$ වූ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. $l$ හි සමීකරණය $m$ ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න. $B \equiv (2, 3)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $l$ රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර ඒකක $\frac{1}{\sqrt{5}}$ බව දී ඇත. $m$ හි අගයන් සොයන්න.




$l$ හි සමීකරණය

$y - 2 = m(x - 1)$ වේ. (5)

එනම් $y - mx - 2 + m = 0$ වේ.

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{|3 - 2m - 2 + m|}{\sqrt{1 + m^2}}$$ (5)

$\Leftrightarrow \quad 1 + m^2 = 5(1 - m)^2$ (5)

$\Leftrightarrow \quad 1 + m^2 = 5(1 - 2m + m^2)$

$\Leftrightarrow \quad 4m^2 - 10m + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2m^2 - 5m + 2 = 0$ (5)

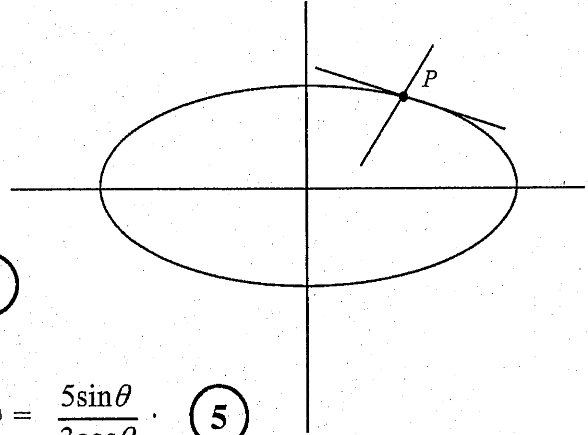
$\Leftrightarrow \quad (2m - 1)(m - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad m = \frac{1}{2}$ or $m = 2.$ (5)

**25**

**7.** $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ඉලිප්සයට එය මත $P \equiv (5\cos\theta,\, 3\sin\theta)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී වූ අභිලම්බ රේඛාවෙහි සමීකරණය $5\sin\theta\, x - 3\cos\theta\, y = 16\sin\theta\cos\theta$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත ඉලිප්සයට එය මත $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අභිලම්බ රේඛාවේ $y-$අන්තඃඛණ්ඩය සොයන්න.




$x = 5\cos\theta,\ y = 3\sin\theta$

$\dfrac{dx}{d\theta} = -5\sin\theta, \quad \dfrac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta.$ (5)

$\sin\theta \neq 0$ සඳහා $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{3\cos\theta}{-5\sin\theta}$ (5)

$\cos\theta \neq 0$ සඳහා $P$ හි දී ඇඳි අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය $= \dfrac{5\sin\theta}{3\cos\theta}.$ (5)

අවශ්‍ය සමීකරණය,

$\cos\theta \neq 0$ සඳහා $y - 3\sin\theta = \dfrac{5\sin\theta}{3\cos\theta}(x - 5\cos\theta)$ වේ. (5)

$$5\sin\theta x - 3\cos\theta y = 16\sin\theta\cos\theta.$$

$\cos\theta = 0$ වන විට ද මෙම සමීකරණය වලංගු වේ. ($P$ යන්න $y-$ අක්ෂය මත පිහිටන විට)

$y-$ අන්තඃඛණ්ඩය සඳහා : $y = -\dfrac{16}{3}\sin\theta.$

නමුත්, $3\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

$\therefore\ y = -\dfrac{8}{\sqrt{3}}.$ (5)

$\therefore$ අවශ්‍ය $y-$ අන්තඃඛණ්ඩය $\left(0, -\dfrac{8}{\sqrt{3}}\right)$ වේ.

**25**

**6.** $y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, $x=0$, $x=\ln 3$ හා $y=0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස $x$–අක්ෂය වටා රේඩියන $2\pi$ වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\dfrac{\pi}{4}(4\ln 2-1)$ බව පෙන්වන්න.

අවශ්‍ය පරිමාව $= \pi\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}\,dx$ (5)

$= \pi\displaystyle\int_2^4 \frac{u-1}{u^2}\,du$ ; මෙහි $u = 1+e^x$. (5)

$= \pi\displaystyle\int_2^4 \left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right\} du$ (5)

$= \pi\left\{\ln|u| + \frac{1}{u}\right\}\Big|_2^4$ (5)

$= \pi\left\{\ln 4 - \ln 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right\}$

$= \dfrac{\pi}{4}\{4\ln 2 - 1\}$ (5)

**25**

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi}\right)} = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{3}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi})}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi})} \times \frac{(\sqrt{3x}+\sqrt{\pi})}{(\sqrt{3x}+\sqrt{\pi})} \quad (5)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(3x-\pi)} \cdot (\sqrt{3x}+\sqrt{\pi}) \quad (5)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{3(x-\frac{\pi}{3})} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} (\sqrt{3x}+\sqrt{\pi})$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot (\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi}) \quad (5) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2\sqrt{\pi} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \quad (5)$$

**25**

---

විකල්ප ක්‍රමය :

$$\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi})}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(x-\frac{\pi}{3})} \times \frac{(x-\frac{\pi}{3})}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

$$= \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(x-\frac{\pi}{3})}\right] \cdot \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)}\right] \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (5) \quad (5)$$

$$= \left[\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u}\right]\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)\right] \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= 1 \cdot 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \quad (5)$$

**25**

**4.** $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. $x$ හි ආරෝහණ බලවලින් $(1+x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න. ඉහත ප්‍රසාරණයේ අනුයාත පද දෙකක සංගුණක සමාන නම්, $n$ ඔත්තේ වන බව පෙන්වන්න.

$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r$, මෙහි ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ $r = 1, 2, \ldots, n$ සඳහා (5) (5)

හා ${}^nC_0 = 1$.

අනුයාත පද දෙකක් ${}^nC_r$ හා ${}^nC_{r+1}$ ලෙස ගත හැක.

${}^nC_r = {}^nC_{r+1}$; (5) මෙහි $r \in \{0, 1, \ldots n-1\}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = \dfrac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!}$ (5)

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{n-r} = \dfrac{1}{r+1}$

$\Leftrightarrow n-r = r+1$

$\Leftrightarrow n = 2r+1$. (5)

$\therefore n$ ඔත්තේ වේ.

**25**

**වෙනත් ක්‍රමයක් :**

අනුයාත පද දෙකක් ${}^nC_{r-1}$ හා ${}^nC_r$ ලෙස ගත හැක.

${}^nC_{r-1} = {}^nC_r$; (5) මෙහි $r \in \{1, 2, 3 \ldots, n\}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{n!}{[n-(r-1)]!\,(r-1)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$ (5)

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{n-(r-1)} = \dfrac{1}{r}$

$\Leftrightarrow n-r+1 = r$

$\Leftrightarrow n = 2r-1$. (5)

$\therefore n$ ඔත්තේ වේ.

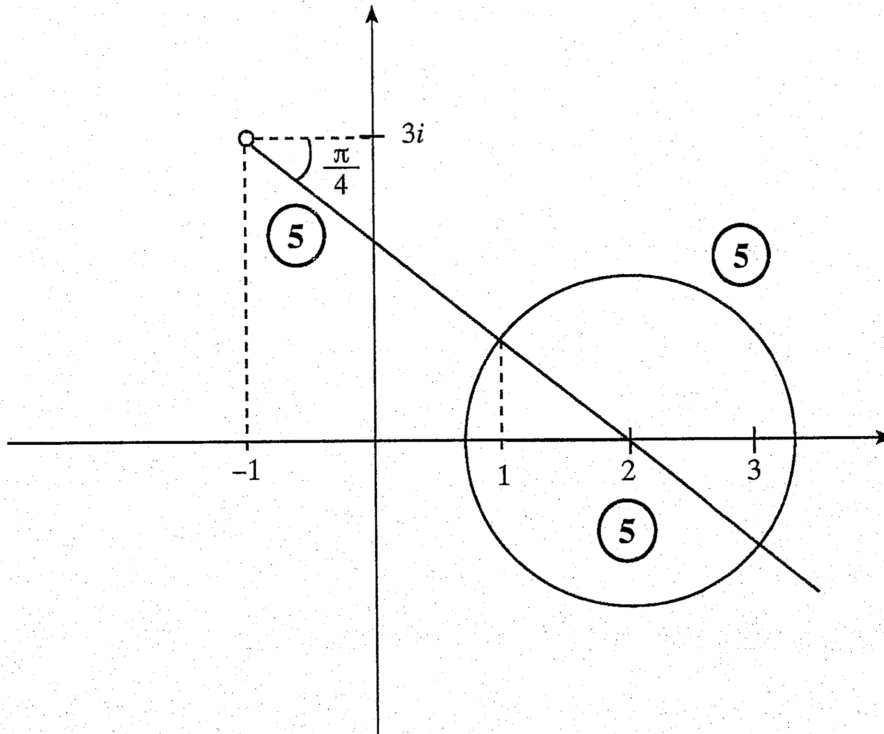
3. එක ම ආගන්ඩ් සටහනක,

(i) $\mathrm{Arg}(z+1-3i) = -\frac{\pi}{4}$ හා

(ii) $|z-2| = \sqrt{2}$

සපුරාලන $z$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයන්හි දළ සටහන් අඳින්න.

**ඒ නයින්,** මෙම පථයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ලියා දක්වන්න.



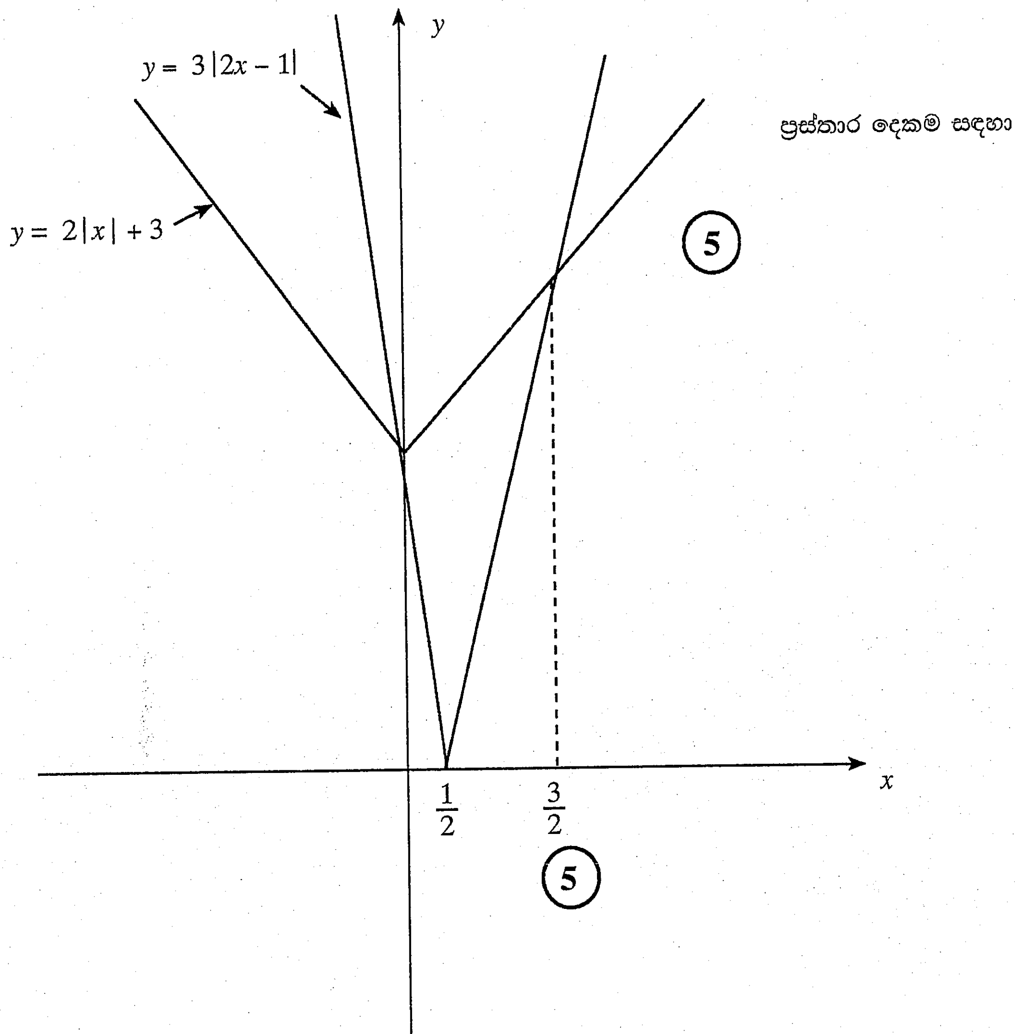

අවශ්‍ය සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $1+i$ (5) හා $3-i$ වේ. (5)

**25**

**විකල්ප ක්‍රමය II :**

පෙර පරිදිම ප්‍රස්තාර සඳහා (5) + (5) .

*x* හි අගයන් සඳහා විකල්ප ක්‍රමයක් :




ප්‍රස්තාර වලින් ,

$3|2x-1| > 2|x|+3$

$\Leftrightarrow \quad x < 0$ or $x > \frac{3}{2}$. (5)

**විකල්ප ක්‍රමය I :**

පෙර පරිදිම ප්‍රස්තාර සඳහා (5) + (5)

$x$ හි අගයන් සඳහා විකල්ප ක්‍රමයක් :

$3\,|2x-1| > 2\,|x|+3$

(i) අවස්ථාව $x \geq \frac{1}{2}$

එවිට, $3\,|2x-1| > 2\,|x|+3 \Leftrightarrow 3\,(2x-1) > 2x+3$

$\Leftrightarrow 6x-3 > 2x+3$

$\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේ දී විසඳුම් වන්නේ $x > \frac{3}{2}$ තෘප්ත කරන $x$ හි අගයන් වේ.

(ii) අවස්ථාව $0 \leq x < \frac{1}{2}$

එවිට, $3\,|2x-1| > 2\,|x|+3 \Leftrightarrow -6x+3 > 2x+3$

$\Leftrightarrow 0 > 8x$

$\Leftrightarrow 0 > x$

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේ දී විසඳුම් නොමැත.

(iii) අවස්ථාව $x < 0$

නිවැරදි විසඳුම් සමග අවස්ථා 3 ම සඳහා (10)
නිවැරදි විසඳුම් සමග අවස්ථා 2ක් පමණක් සඳහා (5)

එවිට, $3\,|2x-1| > 2\,|x|+3 \Leftrightarrow -6x+3 > -2x+3$

$\Leftrightarrow 0 > 4x$

$\Leftrightarrow x < 0$

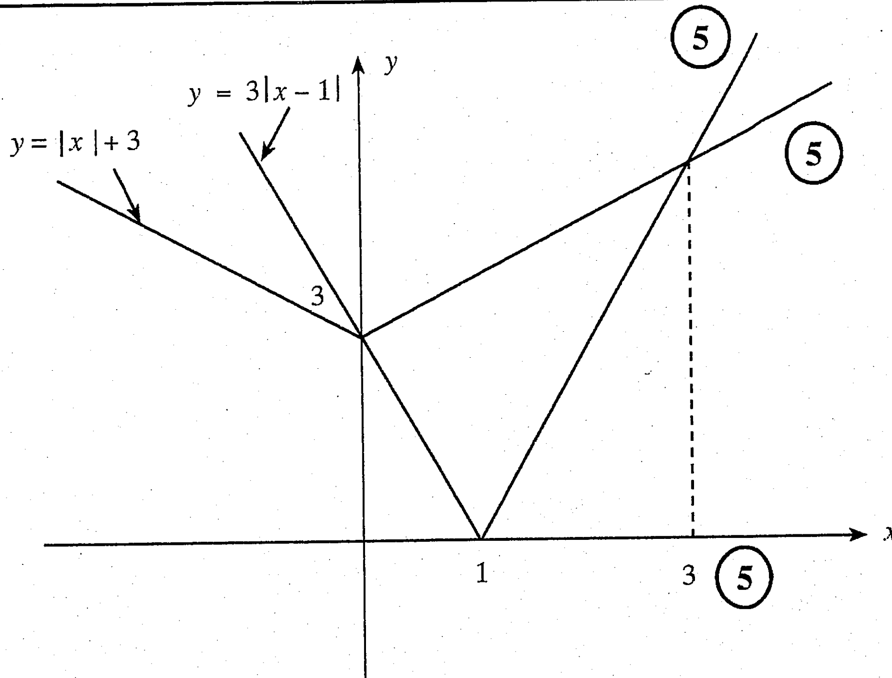
ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේ දී විසඳුම් වන්නේ $x < 0$ තෘප්ත කරන $x$ හි අගයන් වේ.

$\therefore$ දී ඇති අසමානතාවයෙහි විසඳුම් වන්නේ $x < 0$ හෝ $x > \frac{3}{2}$ තෘප්ත කරන $x$ හි අගයන් වේ. (5)

**25**

**2.** එක ම රූප සටහනක $y=3|x-1|$ හා $y=|x|+3$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

එනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $3|2x-1|>2|x|+3$ අසමානතාව සපුරාලන $x$ හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.




එක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයක $x$ – ඛණ්ඩාංකය $x = 0$ වේ. අනෙක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ $x$ – ඛණ්ඩාංකය $x > 1$ සඳහා $3(x-1) = x+3$ මගින් දෙනු ලැබේ.

මෙය $x = 3$ ලබා දෙයි.

දැන්, $3|2x-1| > 2|x| + 3$

$\Leftrightarrow \quad 3|u-1| > |u| + 3$ , මෙහි $u = 2x$. **(5)**

$\Leftrightarrow \quad u < 0$ හෝ $u > 3$ (ප්‍රස්තාරවලට අනුව)

$\Leftrightarrow \quad x < 0$ හෝ $x > \frac{3}{2}$. **(5)**

**25**

**1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(4r+1) = n(2n+3)$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ සඳහා, ව. පැ. $= 4 + 1 = 5$ හා

ද. පැ. $= 1(2+3) = 5$ වේ.

$\therefore$ $n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

ඕනෑම $k \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන $n = k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{k} (4r+1) = k(2k+3)$ වේ. (5)

දැන්, $\sum_{r=1}^{k+1} (4r+1) = \sum_{r=1}^{k} (4r+1) + \{4(k+1)+1\}$

$= k(2k+3) + (4k+5)$ (5)

$= 2k^2 + 7k + 5$

$= (k+1)(2k+5)$ (5)

$= (k+1)[2(k+1)+3]$

ඒ නයින්, $n = k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම්, $n = k+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. $n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව ඉහත පෙන්වා ඇත.

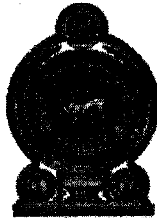
ඒ නයින්, ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

(5)

**25**

සියලුම හිමිකම් ඇවිරිණි. 

රහස්‍ය ලේඛනයකි.



ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2018

# 10 - සංයුක්ත ගණිතය I

## ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

මෙය උත්තරපත්‍ර පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා සකස් කෙරිණි.
පරීක්ෂක සාකච්ඡා පැවැත්වෙන අවස්ථාවේදී ඉදිරිපත්වන අදහස් අනුව මෙහි වෙනස්කම් කරනු ලැබේ.

අවසන් සංශෝධන ඇතුළත් කළ යුතුව ඇත.

# අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2018

## 10 - සංයුක්ත ගණිතය

## ලකුණු බෙදීයාම

I පත්‍රය

| | | | |
|---|---|---|---|
| A කොටස : | 10 X 25 | = | 250 |
| B කොටස : | 05 X 150 | = | 750 |

| | | |
|---|---|---|
| **එකතුව** | = | 1000/10 |
| I පත්‍රය අවසාන ලකුණ | = | 100 |

# උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ පොදු ශිල්පීය ක්‍රම

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ හා ලකුණු ලැයිස්තුවල ලකුණු සටහන් කිරීමේ සම්මත ක්‍රමය අනුගමනය කිරීම අනිවාර්යයෙන් ම කළ යුතුවේ. ඒ සඳහා පහත පරිදි කටයුතු කරන්න.

1. උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමට රතුපාට බෝල් පොයින්ට් පෑනක් පාවිච්චි කරන්න.

2. සෑම උත්තරපත්‍රයකම මුල් පිටුවේ සහකාර පරීක්ෂක සංකේත අංකය සටහන් කරන්න.

   ඉලක්කම් ලිවීමේදී **පැහැදිලි ඉලක්කමෙන්** ලියන්න.

3. ඉලක්කම් ලිවීමේදී වැරදුණු අවස්ථාවක් වේ නම් එය පැහැදිලිව තනි ඉරකින් කපා හැර නැවත ලියා කෙටි අත්සන යොදන්න.

4. එක් එක් ප්‍රශ්නයේ අනු කොටස්වල පිළිතුරු සඳහා හිමි ලකුණු ඒ ඒ කොටස අවසානයේ △ ක් තුළ ලියා දක්වන්න. අවසාන ලකුණු ප්‍රශ්න අංකයත් සමඟ □ ක් තුළ, භාග සංඛ්‍යාවක් ලෙස ඇතුළත් කරන්න. ලකුණු සටහන් කිරීම සඳහා පරීක්ෂකවරයාගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා ඇති තීරුව භාවිත කරන්න.

**උදාහරණ : ප්‍රශ්න අංක 03**

(i) ..........................................................
..........................................................  √  $\frac{4}{5}$
..........................................................

(ii) ..........................................................
..........................................................  √  $\frac{3}{5}$
..........................................................

(iii) ..........................................................
..........................................................  √  $\frac{3}{5}$
..........................................................

03 (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\frac{10}{15}$

**බහුවරණ උත්තරපත්‍ර : (කවුළු පත්‍රය)**

1. අ.පො.ස. (උ.පෙළ) හා තොරතුරු තාක්ෂණ විභාගය සඳහා කවුළු පත්‍ර දෙපාර්තමේන්තුව මගින් සකසනු ලැබේ. නිවැරදි වරණ කපා ඉවත් කළ සහතික කරන ලද කවුළුපතක් ඔබ වෙත සපයනු ලැබේ. සහතික කළ කවුළු පත්‍රයක් භාවිත කිරීම පරීක්ෂකගේ වගකීම වේ.

2. අනතුරුව උත්තරපත්‍ර හොඳින් පරීක්ෂා කර බලන්න. කිසියම් ප්‍රශ්නයකට එක් පිළිතුරකට වඩා ලකුණු කර ඇත්නම් හෝ එකම පිළිතුරක්වත් ලකුණු කර නැත්නම් හෝ වරණ කැපී යන පරිදි ඉරක් අඳින්න. ඇතැම් විට අයදුම්කරුවන් විසින් මුලින් ලකුණු කර ඇති පිළිතුරක් මකා වෙනත් පිළිතුරක් ලකුණු කර තිබෙන්නට පුළුවන. එසේ මකන ලද අවස්ථාවකදී පැහැදිලිව මකා නොමැති නම් මකන ලද වරණය මත ද ඉරක් අඳින්න.
3. කවුළු පත්‍රය උත්තරපත්‍රය මත නිවැරදිව තබන්න. නිවැරදි පිළිතුර ✓ ලකුණකින් ද, වැරදි පිළිතුර 0 ලකුණකින් ද වරණ මත ලකුණු කරන්න. නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව ඒ ඒ වරණ තීරයට පහළින් ලියා දක්වන්න. අනතුරුව එම සංඛ්‍යා එකතු කර මුළු නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව අදාළ කොටුව තුළ ලියන්න.

**ව්‍යුහගත රචනා හා රචනා උත්තරපත්‍ර :**

1. අයදුම්කරුවන් විසින් උත්තරපත්‍රයේ හිස්ව තබා ඇති පිටු හරහා රේඛාවක් ඇඳ කපා හරින්න. වැරදි හෝ නුසුදුසු පිළිතුරු යටින් ඉරි අඳින්න. ලකුණු දිය හැකි ස්ථානවල හරි ලකුණු යෙදීමෙන් එය පෙන්වන්න.

2. ලකුණු සටහන් කිරීමේදී ඕවර්ලන්ඩ් කඩදාසියේ දකුණු පස තීරය යොදා ගත යුතු වේ.

3. සෑම ප්‍රශ්නයකටම දෙන මුළු ලකුණු උත්තරපත්‍රයේ මුල් පිටුවේ ඇති අදාළ කොටුව තුළ ප්‍රශ්න අංකය ඉදිරියෙන් අංක දෙකකින් ලියා දක්වන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස් අනුව ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීම කළ යුතුවේ. සියලු ම උත්තර ලකුණු කර ලකුණු මුල් පිටුවේ සටහන් කරන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස්වලට පටහැනිව වැඩි ප්‍රශ්න ගණනකට පිළිතුරු ලියා ඇත්නම් අඩු ලකුණු සහිත පිළිතුරු කපා ඉවත් කරන්න.

4. පරීක්ෂාකාරීව මුළු ලකුණු ගණන එකතු කොට මුල් පිටුවේ නියමිත ස්ථානයේ ලියන්න. උත්තරපත්‍රයේ සෑම උත්තරයකටම දී ඇති ලකුණු ගණන උත්තරපත්‍රයේ පිටු පෙරළමින් නැවත එකතු කරන්න. එම ලකුණ ඔබ විසින් මුල් පිටුවේ එකතුව ලෙස සටහන් කර ඇති මුළු ලකුණට සමාන දැයි නැවත පරීක්ෂා කර බලන්න.

**ලකුණු ලැයිස්තු සකස් කිරීම :**

මෙවර සියලු ම විෂයන්හි අවසාන ලකුණු ඇගයීම් මණ්ඩලය තුළදී ගණනය කරනු නොලැබේ. එබැවින් එක් එක් පත්‍රයට අදාළ අවසාන ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවලට ඇතුළත් කළ යුතු ය. I පත්‍රයට අදාළ ලකුණු ලකුණු ලැයිස්තුවේ "I වන පත්‍රය" තීරුවේ ඇතුළත් කර අකුරෙන් ද ලියන්න. අදාළ විස්තර ලකුණු ඇතුළත් කර "II වන පත්‍රය" තීරුවේ II පත්‍රයේ අවසාන ලකුණු ඇතුළත් කරන්න. 51 චිත්‍ර විෂයයේ I, II හා III පත්‍රවලට අදාළ ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවල ඇතුළත් කර අකුරෙන් ද ලිවිය යුතු වේ.

***

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$ බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ විට, ව:පැ: $= 1^3 = 1$ හා ද:පැ: $= \frac{1}{4} \cdot 1^2 (1+1)^2 = 1$. (5)

$\therefore$ $n=1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

ඕනෑම $p \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන $n = p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි සිතමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{p} r^3 = \frac{1}{4} p^2 (p+1)^2$. (5)

දැන් $\sum_{r=1}^{p+1} r^3 = \sum_{r=1}^{p} r^3 + (p+1)^3$ (5)

$$= \frac{1}{4} p^2 (p+1)^2 + (p+1)^3$$

$$= (p+1)^2 \frac{[p^2 + 4p + 4]}{4}.$$

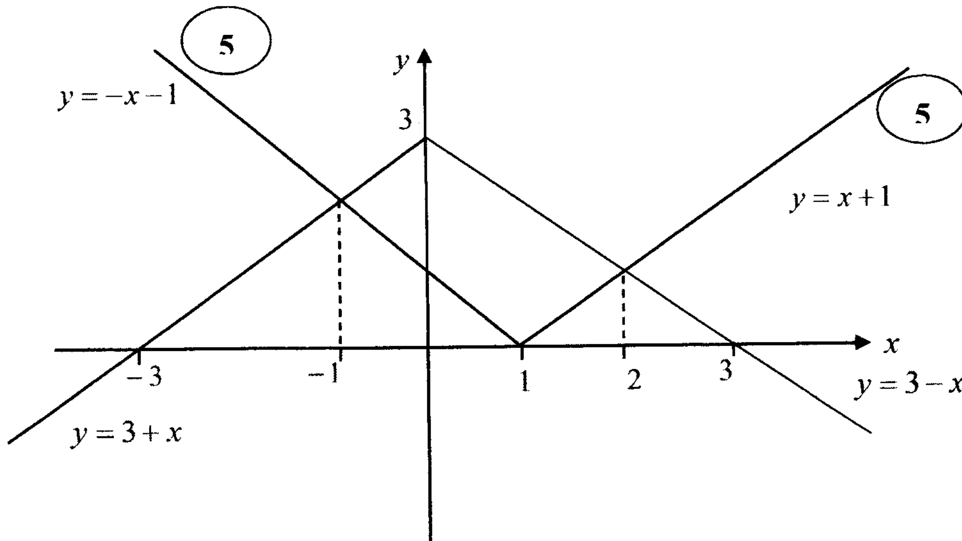
$$= \frac{1}{4} (p+1)^2 (\overline{p+1} + 1)^2.$$ (5)

එනයින් $n = p$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ නම්, $n = p+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. අපි දැනටමත් $n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව පෙන්වා ඇත. එනයින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

25

2. එක ම රූප සටහනක $y = 3 - |x|$ හා $y = |x - 1|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

**ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ**, $|x| + |x - 1| \le 3$ අසමානතාව සපුරාලන $x$ හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.




ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වලදී $-x + 1 = 3 + x$ හෝ $x - 1 = 3 - x$

එනම්, $x = -1$ හෝ $x = 2$. (5)

තවද, $|x| + |x - 1| \le 3$

$\Leftrightarrow \quad |x - 1| \le 3 - |x|$ (5)

එනයින්, ප්‍රස්තාරයෙන්, විසඳුම් $-1 \le x \le 2$ තෘප්ත කරන $x$ අගයන් වේ. (5)

25

---

වෙනත් ක්‍රමයක්

$|x| + |x - 1| \le 3$

(i) අවස්ථාව $\quad x \le 0$: $|x| + |x - 1| \le 3 \Leftrightarrow -x - (x - 1) \le 3$

$\Leftrightarrow -2x + 1 \le 3$ (5)

$\Leftrightarrow x \ge -1$

මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම් $-1 \le x \le 0$ තෘප්ත කරන $x$ අගයන් වේ.

(ii) අවස්ථාව $0 < x \leq 1$

$|x| + |x-1| \leq 3$

$\Leftrightarrow x - (x-1) \leq 3$

$\Leftrightarrow x - (x-1) \leq 3$

$\Leftrightarrow 1 \leq 3$

මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම් $0 < x \leq 1$ වේ. (5)

(iii) අවස්ථාව $1 < x$

$|x| + |x-1| \leq 3$

$\Leftrightarrow x + x - 1 \leq 3$

$\Leftrightarrow 2x \leq 4$

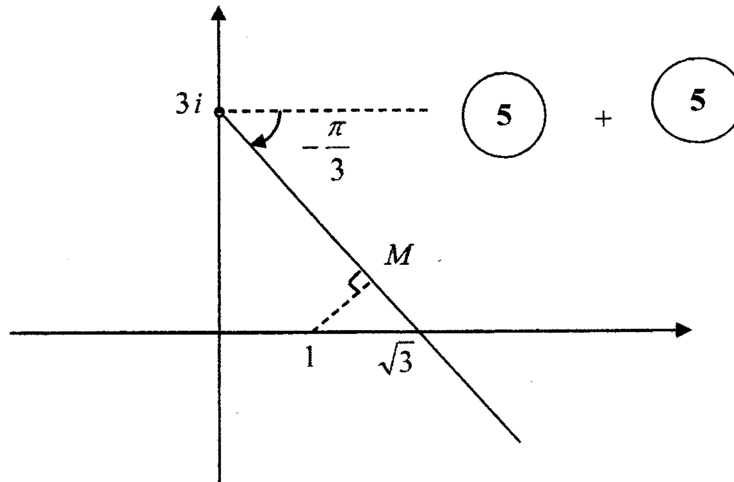
$\Leftrightarrow x \leq 2$

$\therefore$ මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම් $1 < x \leq 2$ වේ.

එනයින් විසඳුම් $-1 \leq x \leq 2$ තෘප්ත කරන $x$ අගයන් වේ. (5)

**3.** ආගන්ඩ් සටහනක, $\text{Arg}(z-3i) = -\frac{\pi}{3}$ සපුරාලන $z$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\text{Arg}(\bar{z}+3i) = \frac{\pi}{3}$ වන පරිදි $|z-1|$ හි අවම අගය සොයන්න.




$$\text{Arg}(\bar{z}+3i) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ \text{Arg}\overline{(\bar{z}+3i)} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ \text{Arg}(z-3i) = -\frac{\pi}{3}.$$ (5)

එනයින්, $\text{Arg}(\bar{z}+3i) = \frac{\pi}{3}$ වන පරිදි $|z-1|$ හි අවම අගය $NM$ දෙනු ලබයි. (5)

මෙහි $NM = (\sqrt{3}-1)\sin\frac{\pi}{3} = \frac{(3-\sqrt{3})}{2}$. (5)

25

4. $\left(x^2+\frac{3k}{x}\right)^8$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ $x$ හා $x^4$ හි සංගුණක සමාන වේ. $k$ නියතයෙහි අගය සොයන්න.

$$\left(x^2+\frac{3k}{x}\right)^8 = \sum_{r=0}^{8} {}^8C_r (x^2)^r \left(\frac{3k}{x}\right)^{8-r} \quad (5)$$

$$= \sum_{r=0}^{8} {}^8C_r (3k)^{8-r} x^{3r-8}$$

$x^1 : 3r-8=1 \Leftrightarrow r=3.$ (5)
$x^4 : 3r-8=4 \Leftrightarrow r=4.$

දත්තයෙන් ${}^8C_r(3k)^5 = {}^8C_4(3k)^4$ (5)

$$\frac{8!}{3!\,5!}3^5 k = \frac{8!}{4!\,4!}3^4 \quad (5)$$

$$k = \frac{5}{12}. \quad (5)$$

**5.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)}=\frac{\pi^2}{32}$ **බව පෙන්වන්න.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{x^2(x+1)} \quad (5)$$

$$=\lim_{x\to 0}2\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{\left(\frac{\pi x}{8}\right)}\right]^2\cdot\frac{\pi^2}{64}\cdot\frac{1}{x+1} \quad (5)$$

$$=2\cdot 1\cdot\frac{\pi^2}{64}\cdot\frac{1}{1} \quad (5)\ (5)$$

$$=\frac{\pi^2}{32}. \quad (5)$$

25

---

වෙනත් ක්‍රමයක්

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)}\cdot\frac{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

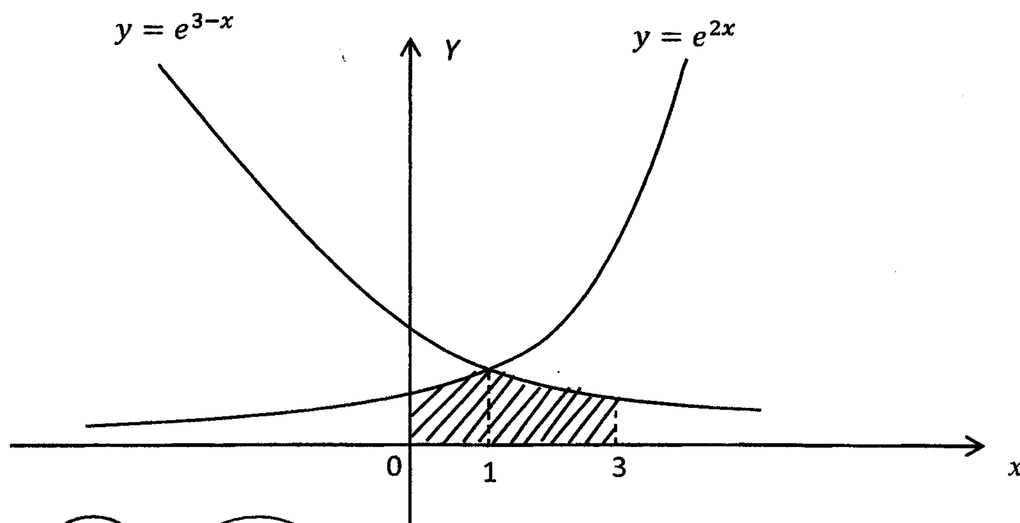
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)\left(1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)} \quad (5)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\right]^2\cdot\frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \quad (5)$$

$$=1\cdot\frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} \quad (5)\ (5)$$

$$=\frac{\pi^2}{32}. \quad (5)$$

**6.** $y = e^{2x}$, $y = e^{3-x}$, $x = 0$, $x = 3$ හා $y = 0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය, වර්ග ඒකක $\frac{3}{2}(e^2 - 1)$ බව පෙන්වන්න.




(5) (5)

$$\int_0^1 e^{2x}\,dx + \int_1^3 e^{3-x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1 + \frac{e^{3-x}}{(-1)}\Big|_1^3$$ (5)

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + (-1) + e^2$$ (5)

$$= \frac{3e^2}{2} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{2}(e^2 - 1).$$ (5)

**25**

---

**7.** $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ සඳහා $x = \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)$ හා $y = \sin t$ පරාමිතික සමීකරණ මගින් $C$ වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ.
$\frac{dy}{dx} = \cos t \sin t$ බව පෙන්වන්න.

$t = \frac{2\pi}{3}$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී $C$ වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශ රේඛාවෙහි අනුක්‍රමණය $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

$$x = \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right) \qquad y = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tan\frac{t}{2}} \times \sec^2\frac{t}{2} \times \frac{1}{2}$$ (5)

$$\frac{dy}{dt} = \cos t$$ (5)

$$= \frac{1}{2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}$$ (5)

$$= \frac{1}{\sin t}$$

දැන් $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \cos t \sin t$ (5)

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

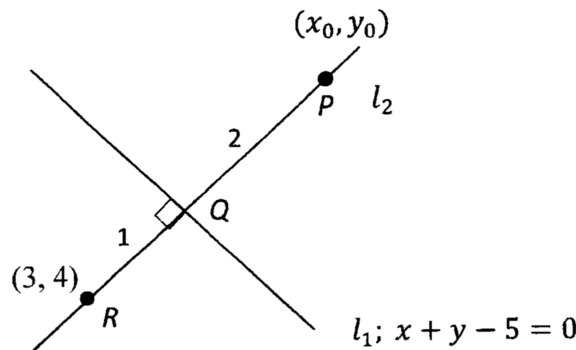
(5)

25

---

8. $l_1$ යනු $x + y - 5 = 0$ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. $P \equiv (3, 4)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන හා $l_1$ ට ලම්බ වූ $l_2$ සරල රේඛාවෙහි සමීකරණය සොයන්න.

$Q$ යනු $l_1$ හා $l_2$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය යැයි ද $R$ යනු $PQ : QR = 1 : 2$ වන පරිදි $l_2$ මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. $R$ හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.




$l_2$ හි අනුක්‍රමණය $= -\frac{1}{-1} = 1$ (5)

$l_2$ සමීකරණය : $y - 4 = 1(x - 3)$

$x - y + 1 = 0$ (5)

(5) $Q \equiv (2,3)$.

$R \equiv (x_0, y_0)$ යයි ගනිමු.

එවිට,

$2 = \frac{x_0+6}{3}$ සහ $3 = \frac{y_0+8}{3}$ (5)

> වෙනත් ක්‍රමයක්
>
> $\frac{QR}{RP} = -\frac{2}{3}$ බැවින් (5)
>
> $R \equiv \left(\frac{-2\times 3 + 2\times 3}{3-2}, \frac{-2\times 4 + 3\times 3}{3-2}\right)$
>
> $= (0,1)$ (5)

$\therefore x_0 = 0$ සහ $y_0 = 1.$

$\therefore R \equiv (0,1).$ (5)

25

---

9. $P \equiv (1,2)$ හා $Q \equiv (7,10)$ යැයි ගනිමු. $P$ හා $Q$ ලක්ෂ්‍ය විෂ්කම්භයක අන්ත ලෙස වූ වෘත්තයෙහි සමීකරණය $S \equiv (x-1)(x-a)+(y-2)(y-b)=0$ වන පරිදි $a$ හා $b$ නියතවල අගයන් ලියා දක්වන්න.

$S' \equiv S + \lambda(4x-3y+2)=0$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ. $P$ හා $Q$ ලක්ෂ්‍ය $S'=0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වා, මෙම වෘත්තය $R \equiv (1,4)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන පරිදි $\lambda$ හි අගය සොයන්න.

$a = 7,$

$b = 10.$ (5)

$P \equiv (1,2)$ සහ $Q \equiv (7,10)$ යන දෙකම $s=0$ සහ $4x-3y+2=0$ යන දෙකම තෘප්ත කරන බැවින් $s'=0$ වේ. (5) (5)

$\therefore P$ සහ $Q$ ලක්ෂ්‍ය $s'=0$ මත පිහිටයි.

$s'=0$ යන්න $R \equiv (1,4)$ හරහා යයි නම්,

$0+(4-2)\times(4-10)+\lambda(4-12+2)=0$ වේ. (5)

$6\lambda = -12$

$\lambda = -2.$ (5)

25

---

**10.** $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ සඳහා $\sec^3 x + 2\sec^2 x \tan x + \sec x \tan^2 x = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $n \in \mathbb{Z}$ වේ.

$$\sec^3 a = 2\sec^2 x \tan x + \sec x \tan^2 x$$

$$= \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \quad (5)$$

$$= \frac{1 + 2\sin x + \sin^2 x}{\cos^3 x}$$

$$= \frac{(1+\sin x)^2}{\cos x(1-\sin^2 x)} \quad (5)$$

$$= \frac{(1+\sin x)^2}{\cos x(1-\sin x)(1+\sin x)} \quad (5) \qquad \because n \in \mathbb{Z} \text{ සඳහා } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(1+\sin x)}{\cos x(1-\sin x)}$$

$$= \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1-\sin x)^2} \quad (5)$$

$$= \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}. \quad (5)$$

25

---

**11.** (*a*) $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$ සමීකරණයේ විවේචකය $a$ හා $b$ ඇසුරෙන් ලියා දක්වා **ඒ නයින්**, මෙම සමීකරණයේ මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න.

මෙම මූල $\alpha$ හා $\beta$ යැයි ගනිමු. $a$ හා $b$ ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වන්න.

දැන්, $\beta = \alpha + 2$ යැයි ගනිමු. $a^2 - ab + b^2 = 9$ බව පෙන්වා,

$|a| \leq \sqrt{12}$ බව **අපෝහනය** කර, $a$ ඇසුරෙන් $b$ සොයන්න.

(*b*) $c (\neq 0)$ හා $d$ තාත්වික සංඛ්‍යා යැයි ද $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$ යැයි ද ගනිමු. $(x + c)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $-c^3$ වේ. තව ද $(x - c)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් වේ. $c = -2$ හා $d = -12$ බව පෙන්වන්න.

$c$ හා $d$ හි මෙම අගයන් සඳහා $(x^2 - 4)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(a) $3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$

විවේචකය $\Delta = 4(a+b)^2 - 12(ab)$

$$= 4(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) \quad (10)$$

$$= 4(a^2 - ab + b^2)$$

$$= 4\left[\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right] \geq 0 \text{ for all } a, b \in \mathbb{R}.$$ (5)

(5)

ඒ නයින්, මූල තාත්ත්වික වේ. (5)

25

---

$\alpha + \beta = \frac{2}{3}(a + b)$ (5) $\quad \alpha\beta = \frac{ab}{3}$ (5)

$\beta = \alpha + 2 \Rightarrow (\beta - \alpha)^2 = 4$ (5)

$\Rightarrow (\beta + \alpha)^2 - 4\,\alpha\beta = 4$ (5)

$\Rightarrow \frac{4}{9}(a + b)^2 - \frac{4}{3}\,ab = 4$ (5) (5)

$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 3ab = 9$

$\Rightarrow a^2 - ab + b^2 = 9$ (5)

35

---

$b^2 - ab + a^2 = 9$

$$\Rightarrow \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - a^2 + 9$$

$$= -\frac{3a^2}{4} + 9$$

$$= \frac{3}{4}(12 - a^2)$$ (1)

$\Rightarrow 12 - a^2 \geq 0$ (5)

$\Rightarrow \quad |a| \leq \sqrt{12}$ (5)

$$b = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{12 - a^2}.$$ (10)

30

---

(b) $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$

$f(-c) = -c^3 + 4c^2 - c^2 + d = -c^3$ (5)

(5) $\Rightarrow 3c^2 + d = 0 \quad ------(1)$

$f(c) = c^3 + 4c^2 + c^2 + d = 0$ (5)

(5) $\Rightarrow c^3 + 5c^2 + d = 0 ------(2)$

$(2) - (1)$ මගින් $c^3 + 2c^2 = 0$ ලැබේ. (5)

$\Rightarrow c^2(c + 2) = 0$

$c \neq 0$, නිසා $c = -2$. (5)

$\Rightarrow d = -3c^2 = -12.$ (5)

35

---

දැන් $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 12.$

$f(x)$ යන්න $x^2 - 4$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $\lambda x + \mu$ ආකාරය ගනී.

එනම් $f(x) = (x^2 - 4)q(x) + \lambda x + \mu.$ (5)

$\Rightarrow f(x) = (x - 2)(x + 2)q(x) + \lambda x + \mu.$

$f(2) = 8 = 2\lambda + \mu$ හා $f(-2) = 0 = -2\lambda + \mu$

(5) (5)

$\Rightarrow \mu = 4$ හා $\lambda = 2.$ (5)

$\therefore$ ශේෂය $= 2x + 4.$ (5)

25

**12.** (*a*) එක එකක පිරිමි ළමයින් තිදෙනකු හා ගැහැනු ළමයින් දෙදෙනකු සිටින කණ්ඩායම් දෙකක සාමාජිකයන් අතුරෙන්, සාමාජිකයන් හයදෙනකුගෙන් යුත් කමිටුවක් තෝරා ගත යුතුව ඇත්තේ කමිටුවේ සිටින ගැහැනු ළමයින් සංඛ්‍යාව වැඩි තරමින් දෙදෙනකු වන පරිදි ය.

(i) කමිටුවට එක් එක් කණ්ඩායමෙන් සාමාජිකයන් ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගත යුතු නම්,

(ii) කමිටුවට එක් ගැහැනු ළමයකු පමණක් තෝරා ගත යුතු නම්,

සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස් කමිටු ගණන සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) = \dfrac{1}{(r+1)^2}$ සහ $U_r = \dfrac{(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) - f(r+2) = 4U_r$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{13}{144} - \frac{1}{4(n+2)^2} - \frac{1}{4(n+3)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $t_n = \displaystyle\sum_{r=n}^{2n} U_r$ යැයි ගනිමු.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ බව පෙන්වන්න.

(a) (i)

| තේරිය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන | | කමිටු ගණන | |
|---|---|---|---|
| 1 කණ්ඩායම | 2 කණ්ඩායම | | |
| 2 | 4 | | |
| 1G 1B | 1G 3B | $2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ | 10 |
| 2B | 1G 3B | ${}^3C_2 \times 2 \times 1 = 6$ | 10 |
| 2B | 2G 2B | ${}^3C_2 \times {}^2C_2 \times {}^3C_2 = 9$ | 10 |
| | | 27 | 5 |

$\therefore$ වෙනස් කමිටු ගණන $= 27 \times 2$

$= 54$ 10

45

(ii) 1G 5B

10 ${}^4C_1 \times {}^6C_5 = 24.$ 5

15

(i) වෙනත් ක්‍රමයක්

| 1 කණ්ඩායම | | 2 කණ්ඩායම | | කමිටු ගණන | |
|---|---|---|---|---|---|
| M(3) | F(2) | M(3) | F(2) | | |
| 2 | | 2 | 2 | ${}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^2C_2 = 9$ | 10 |
| 2 | | 3 | 1 | ${}^3C_2 \times {}^3C_3 \times {}^2C_1 = 6$ | 10 |
| 1 | 1 | 3 | 1 | ${}^3C_1 \times {}^2C_1 \times {}^3C_3 \times {}^2C_1 = 12$ | 10 |
| 2 | 2 | 2 | | 9 | |
| 3 | 1 | 2 | | 6 | 5 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 12 | |

කමිටු ගණන: $9 + 6 + 12 + 9 + 6 + 12 = 54$ (10)

(b)

$$f(r) - f(r+2) = \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{1}{(r+3)^2}$$ (5)

$$= \frac{4(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2}$$ (5)

$$= 4U_r$$ (5)

15

එවිට

$$r = 1; \quad 4U_1 = f(1) - f(3)$$
$$r = 2; \quad 4U_2 = f(2) - f(4)$$ (10)
$$r = 3; \quad 4U_3 = f(3) - f(5)$$
$$\vdots$$
$$r = n-2; \quad 4U_{n-2} = f(n-2) - f(n)$$
$$r = n-1; \quad 4U_{n-1} = f(n-1) - f(n+1)$$
$$r = n; \quad 4U_n = f(n) - f(n+2)$$ (10)

$$4\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2)$$ (10)

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{(n+3)^2}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{13}{144} - \frac{1}{4(n+2)^2} - \frac{1}{4(n+3)^2}.$$ (10)

40

$n \to \infty$ විට දෘ. පැ. හි සීමාව $\frac{13}{144}$. (5)

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී වන අතර එකතුව $\frac{13}{144}$. (5) (5)

15

$$t_n = \sum_{r=n}^{2n} U_r$$

$$= \sum_{r=1}^{2n} U_r - \sum_{r=1}^{n-1} U_r$$ (5)

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී බැවින්

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{2n} U_r - \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n-1} U_r$$ (5)

$$= \frac{13}{144} - \frac{13}{144}$$ (5)

$$= 0.$$ (5)

20

---

13. (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -1 & 0 \\ 1 & 3a \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{P} = \mathbf{AB}$ මගින් අර්ථ දැක්වෙන $\mathbf{P}$ න්‍යාසය සොයා, $a$ හි කිසිදු අගයකට $\mathbf{P}^{-1}$ **නොපවතින** බව පෙන්වන්න.

$\mathbf{P}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ නම්, $a = 2$ බව පෙන්වන්න.

$a$ සඳහා මෙම අගය සහිත ව, $\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \mathbf{I}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසයයි.

$\mathbf{Q}^{-1}$ ලියා දක්වා $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}\mathbf{R} = \left(\frac{1}{5}\mathbf{Q}\right)^{-1}$ වන පරිදි $\mathbf{R}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(b) $z = x + iy$ යැයි ගනිමු; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$ වේ. $z$ හි, මාපාංකය $|z|$ හා ප්‍රතිබද්ධය $\bar{z}$ අර්ථ දක්වන්න.

(i) $z\bar{z} = |z|^2$,

(ii) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$ හා $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$

බව පෙන්වන්න.

$z \neq 1$ හා $w = \frac{1+z}{1-z}$ යැයි ගනිමු. $\mathrm{Re}\,w = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ හා $\mathrm{Im}\,w = \frac{2\,\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2}$ බව පෙන්වන්න.

$z = \cos\alpha + i\sin\alpha\ (0 < \alpha < 2\pi)$ නම්, $w = i\cot\frac{\alpha}{2}$ බව තව දුරටත් පෙන්වන්න.

(c) ආගන්ඩ් සටහනක, $A$ හා $B$ ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් $-3i$ හා $4$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. $C$ හා $D$ ලක්ෂ්‍ය පළමුවන චෘත්ත පාදකයේ පිහිටන්නේ $ABCD$ රොම්බසයක් හා $B\hat{A}D = \theta$ වන පරිදි ය; මෙහි $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)$ වේ. $C$ හා $D$ ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(a) $P = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -1 & 0 \\ 1 & 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{pmatrix}.$ (10)

10

---

$\begin{vmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 2a = 0.$ (5)

$\therefore$ $a$ හි කිසිම අගයක් සඳහා $P^{-1}$ නොපවතී. (5)

10

---

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

$P^{-1}$ පැවතීම සඳහා

$\begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b, c, d, e \in \mathbb{R}$ වන පරිදි පැවතිය යුතුය. (5)

$\Leftrightarrow 2b + 2ad = 1, \quad b + ad = 0, \quad 2c + 2ae = 0$ සහ $c + ae = 1,$

මෙය විසංවාදයකි.

$\therefore$ $a$ හි කිසිම අගයක් සඳහා $P^{-1}$ නොපවතී. (5)

10

If $P\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ නම් $\begin{pmatrix} 2 + 4a \\ 1 + 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$ (5)

$\Leftrightarrow 2 + 4a = 10$ සහ $1 + 2a = 5.$

$\Leftrightarrow a = 2.$ (5)

10

---

$a = 2.$

$Q = P + I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$ (5)

$\therefore Q^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$ (10)

15

---

$AA^T - \frac{1}{2}R = \left(\frac{1}{5}Q\right)^{-1}$

$= 5Q^{-1}.$ (5)

$\Leftrightarrow R = 2AA^T - 10Q^{-1}$

$= 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 10\left(\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (5)

(5)

$= 2\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$

$= \begin{pmatrix} -2 & 20 \\ 14 & 36 \end{pmatrix}.$ (5)

20

(b) $z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ සහ $\bar{z} = x - iy.$ (5) (5) **10**

(i) $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$ (5)

(ii) $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\,\text{Re}\, z$ සහ (5)

$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i\,\text{Im}\, z.$ (5) **15**

---

$z \neq 1$ නම් $w = \frac{1+z}{1-z} \times \frac{1-\bar{z}}{1-\bar{z}} = \frac{1 - z\bar{z} + z - \bar{z}}{|1-z|^2} = \frac{1 - |z|^2 + 2i\,\text{Im}\, z}{|1-z|^2}$

(5) (5) (5)

$\Rightarrow \text{Re}\, w = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ සහ $\text{Im}\, w = \frac{2\text{Im}\, z}{|1-z|^2}$ (5) **20**

---

$z = \cos\alpha + i\sin\alpha \ (0 < \alpha < 2\pi).$

එවිට $|z| = 1 \Leftrightarrow \text{Re}\, w = 0.$ (5)

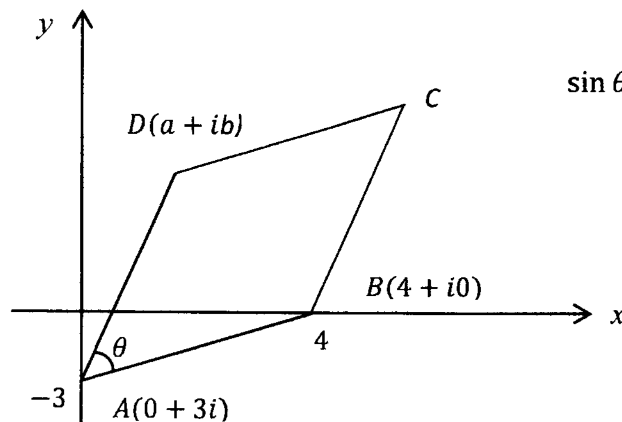
$\therefore\ w = \frac{2i\,\text{Im}\, z}{|1-z|^2} = \frac{2i\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \frac{2i\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)} = i\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = i\cot\frac{\alpha}{2}.$

(5) (5) (5)

**20**

---

(c)




$\sin\theta = \frac{7}{25}, \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{24}{25}$

$D \equiv (a, b)$ යයි ගනිමු.

$A$ වටා $AB$ වාමාවර්තව භ්‍රමණය කිරීමෙන් $AD$ ගත හැක.

$\therefore a + i(b+3) = (4+3i)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= (4+3i)\left(\frac{24}{25} + i\frac{7}{25}\right)$ (10)

$\Leftrightarrow a + i(b+3) = 3 + 4i.$

$\Leftrightarrow a = 3$ හා $b = 1.$

$\therefore D$ මගින් $3 + i$ නිරූපණය කරයි. (05)

$C \equiv (p, q)$, නම්, $\frac{p+0}{2} = \frac{3+4}{2}$ හා $\frac{q-3}{2} = \frac{1+0}{2}.$

$\Rightarrow p = 7$ හා $q = 4.$

$\therefore C$ මගින් $7+4i$ නිරූපණය කරයි. (05) **30**

---

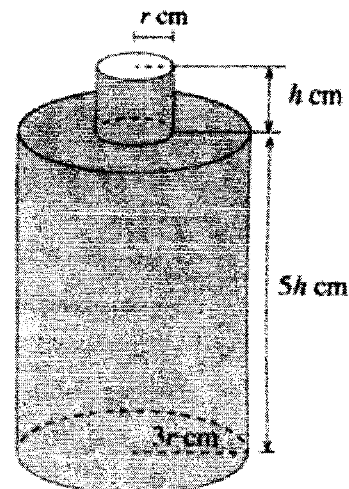
**14.** (*a*) $x \neq -1, \frac{1}{3}$ සඳහා $f(x) = \frac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq -1, \frac{1}{3}$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x) = \frac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, $k(x+1)^2(3x-1) = 16(x-1)$ සමීකරණයට හරියටම එක් මූලයක් පවතින පරිදි $k \in \mathbb{R}$ හි අගයන් සොයන්න.

(*b*) අරය $3r$ cm හා උස $5h$ cm වන සංවෘත කුහර සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක උඩත් මුහුණතින් අරය $r$ cm වන තැටියක් ඉවත් කර, අරය $r$ cm හා උස $h$ cm වන විවෘත කුහර සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සවිකර $391\pi$ cm$^3$ ක පරිමාවක් සහිත බෝතලයක් සාදා ගත යුතුව ඇත. බෝතලයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $S$ cm$^2$ යන්න $S = \pi r(32h + 17r)$ බව දී ඇත. $S$ අවම වන පරිදි $r$ හි අගය සොයන්න.




(a) $x \neq -1, \frac{1}{3}$ සඳහා; $f(x) = \frac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}.$

එවිට

$$f'(x) = \frac{16(x+1)^2(3x-1) - 16(x-1)[2(x+1)(3x-1) + 3(x+1)^2]}{(x+1)^4(3x-1)^2}$$ (15)

$$= \frac{16(x+1)[(x+1)(3x-1) - 2(x-1)(3x-1) - 3(x-1)(x+1)]}{(x+1)^4(3x-1)^2}$$

$$= \frac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2};\ \left(x \neq -1, \frac{1}{3}\right).$$ (10)

**25**

---

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, එවිට $y = 0$. (5)

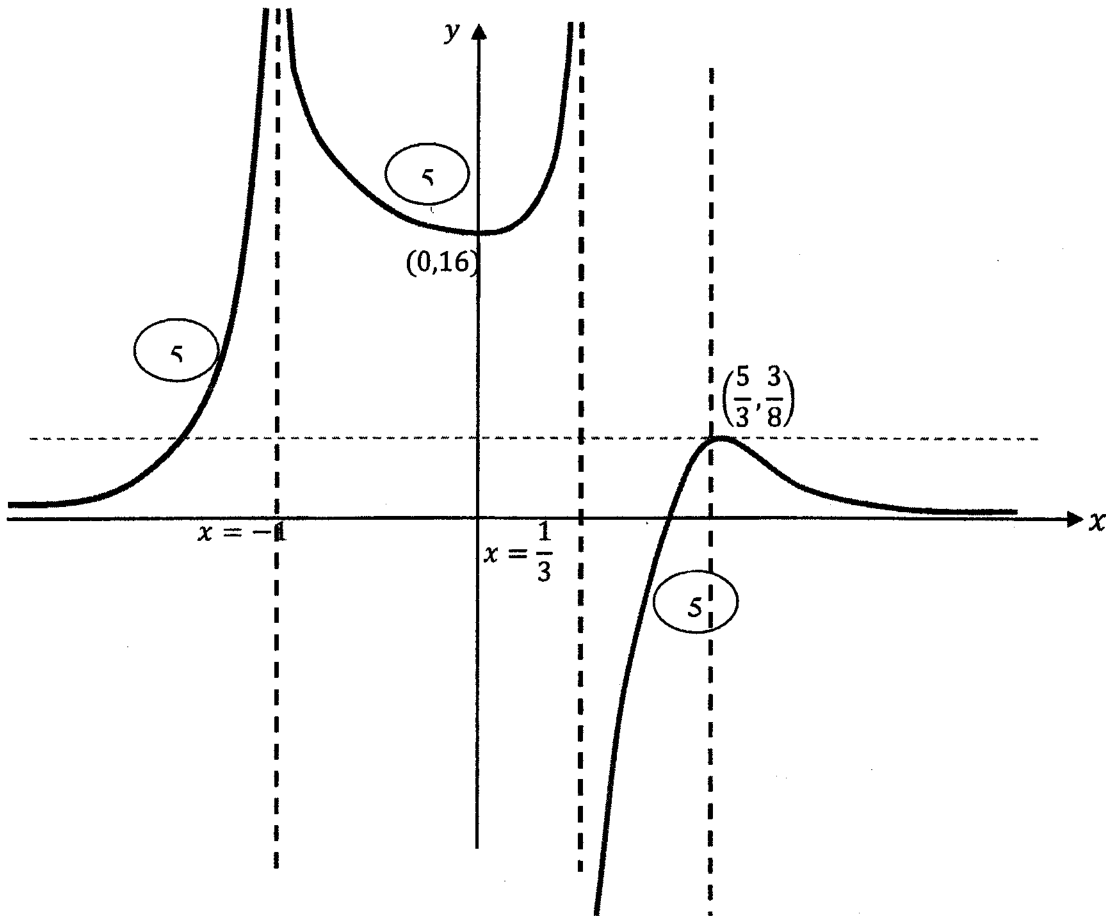
$\lim_{x\to-1^{\pm}} f(x) \to \infty$ , $\lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f(x) \to \infty$ සහ $\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x) \to -\infty$.

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ: $x = -1$ සහ $x = \frac{1}{3}$. (5)

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය වලදී $f'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ $x = 0$ හෝ $x = \frac{5}{3}$.

| | $-\infty < x < -1$ | $-1 < x < 0$ | $0 < x < \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$ | $\frac{5}{3} < x < \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ ලකුණ | $(+)$ | $(-)$ | $(+)$ | $(+)$ | $(-)$ |
| | $f$ ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ | $f$ ඒකවිධ ලෙස අඩුවේ | $f$ ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ | $f$ ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ | $f$ ඒකවිධ ලෙස අඩුවේ |
| | (5) | (5) | (5) | (5) | (5) |

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය: $(0,16)$ ස්ථානීය අවමයක් සහ $\left(\frac{5}{3}, \frac{3}{8}\right)$ ස්ථානීය උපරිමයක්.
(5) (5)




60

$k(x+1)^2(3x-1)=16(x-1).$

$$\Leftrightarrow k=\frac{16(x-1).}{(x+1)^2(3x-1)}.$$ (5)

$k\leq 0$ හෝ $\frac{3}{8}<k<16$ මනම් පමණක් දෙන ලද සමීකරණයට හරියටම එක් මූලයක් පමණක් පවතී. (5) (5)

15

(b) පරිමාව: $391\pi=\pi(3r)^2(5h)+\pi r^2h$

$\Rightarrow 391=46r^2h$

$\Rightarrow h=\frac{17}{2r^2},\quad (r>0).$ (5) (10)

පෘෂ්ඨීක වර්ගඵලය: $S=\pi r(32h+17r).$

$=17\pi\left(\frac{16}{r}+r^2\right)$ (5)

(5) $\dfrac{dS}{dr} = 17\pi\left(-\dfrac{16}{r^2} + 2r\right) = \dfrac{34\pi(r^3 - 8)}{r^2}$ (5)

$\dfrac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = 2.$ (5)

$0 < r < 2$ විටදී $\dfrac{dS}{dr} < 0$ සහ $r > 2$ විටදී $\dfrac{dS}{dr} > 0.$

(5) (5)

$\therefore\ r = 2$ විටදී $S$ අවම වේ. (5)

50

15. (*a*) (i) $x^2, x^1$ හා $x^0$ හි සංගුණක සැසඳීමෙන්,
සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) - Ax^3 = 1$ වන පරිදි $A, B$ හා $C$ නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\frac{1}{x^3(x-1)}$ යන්න භින්න භාග වලින් ලියා දක්වා $\int \frac{1}{x^3(x-1)}\,dx$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int x^2 \cos 2x\,dx$ සොයන්න.

(*b*) $\theta = \tan^{-1}(\cos x)$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx = 2\ln(1+\sqrt{2})$ බව පෙන්වන්න.

$a$ නියතයක් වන $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්, $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$ සොයන්න.

(a) (i) $Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) - Ax^3 = 1$

සංගුණක සැසඳීමෙන්:

$x^2 \quad : -A + B = 0$ (5)

$x^1 \quad : -B + C = 0$ (5)

$x^0 \quad : \quad -C = 1$ (5)

$A = -1, B = -1$ and $C = -1$ (5)

**20**

---

$1 = -x^2(x-1) - x(x-1) - (x-1) + x^3$

$\therefore \frac{1}{x^3(x-1)}$ භින්න භාග ඇසුරින්:

$\frac{1}{x^3(x-1)} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x-1}$ ලෙස වේ. (5)

එනයින් $\int \frac{1}{x^3(x-1)}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^3}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$

$= -\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \ln|x-1| + C,$ (5)

(5) (5) (5) (5)

මෙහි $C$ යනු අභිමත නියතයක් වේ.

**30**

---

(ii) $\int x^2 \cos 2x\,dx = \frac{x^2 \sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int 2x \sin 2x\,dx$ (5) (5)

$= \frac{x^2 \sin 2x}{2} + \frac{x \cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$ (5) (5)

$= \dfrac{x^2 \sin 2x}{2} + \dfrac{x \cos 2x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4} + C$, මෙහි $C$ යනු අභිමත නියතයක් වේ. (5) (5)

30

---

(b) $\theta = \tan^{-1}(\cos x);\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\tan\theta = \cos x \implies \sec^2\theta\, d\theta = -\sin x\, dx$ (5)

$x = 0 \implies \theta = \tan^{-1}(1) \implies \theta = \frac{\pi}{4}$ (5)

$x = \pi \implies \theta = \tan^{-1}(-1) \implies \theta = -\frac{\pi}{4}$ (5)

$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d\theta$ (5) (5) (5) $\left(\sqrt{sec^2\theta} = \sec\theta \text{ as } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{(\sec\theta+\tan\theta)} d\theta$ (5)

$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \ln(\sqrt{2}+1) - \ln(\sqrt{2}-1)$ (5)

$= \ln\left(\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\right)$

$= 2\ln(\sqrt{2}+1).$ (5)

50

---

$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{\sqrt{1+\cos^2(\pi-x)}} dx$ (5)

$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$ (5)

$\implies I = \pi[2\ln(\sqrt{2}+1)] - I$ (5)

$\implies 2I = 2\pi\ln(\sqrt{2}+1)$

$\implies I = \pi\ln(\sqrt{2+1}).$ (5)

20

16. $A \equiv (-2, -3)$ හා $B \equiv (4, 5)$ යැයි ගනිමු. $AB$ රේඛාව සමග $l_1$ හා $l_2$ රේඛා එක එකක් සාදන සුළු කෝණය $\frac{\pi}{4}$ වන පරිදි $A$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන $l_1$ හා $l_2$ රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න.

$P$ හා $Q$ ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් $l_1$ හා $l_2$ මත ගෙන ඇත්තේ $APBQ$ සමචතුරස්‍රයක් වන පරිදි ය.

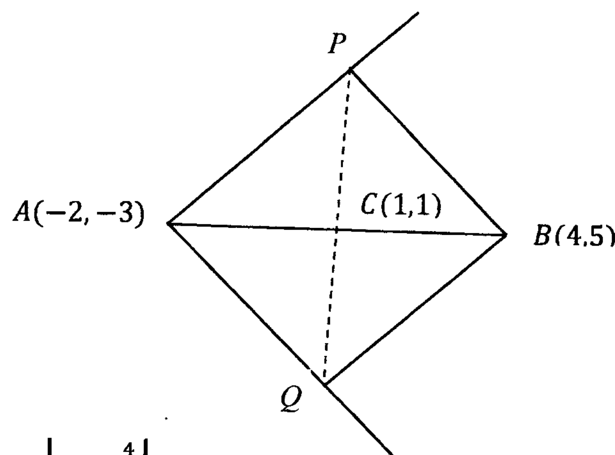
$PQ$ හි සමීකරණය සොයා, $P$ හා $Q$ හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

තව ද $A, P, B$ හා $Q$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන $S$ වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

$\lambda > 1$ යැයි ගනිමු. $R \equiv (4\lambda, 5\lambda)$ ලක්ෂ්‍යය, $S$ වෘත්තයට පිටතින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

$R$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය සොයන්න.

$\lambda (> 1)$ විචලනය වන විට, මෙම ස්පර්ශ ජ්‍යායන් අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව පෙන්වන්න.




$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4m}{3}}\right| \quad (10)$$

$$\Rightarrow \left(m - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(1 + \frac{4m}{3}\right)^2 \quad (5)$$

$$\Rightarrow 7m^2 + 48m - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (7m - 1)(m + 7) = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{7} \text{ or } m = -7.$$

(5)    (5)

∴ අවශ්‍ය සමීකරණ වන්නේ:

(i) $y+3=\frac{1}{7}(x+2) \Rightarrow x-7y-19=0,$ (10)

සහ

(ii) $y+3=-7(x+2) \Rightarrow 7x+y+17=0.$ (10)

45

---

$l_1$ යනු $x-7y-19=0$ රේඛාව සහ අනෙක $l_2$ යැයි ගනිමු.

$PQ$ හි සමීකරණය: $y-1=-\frac{3}{4}(x-1) \Rightarrow 3x+4y-7=0$ (10)

$l_1$ සහ $PQ$ හි ඡේදන ලක්ෂය: $P=(5,-2)$ (5)

$Q=(x_0,y_0)$ නම්,

$$\frac{5+x_0}{2}=1 \Rightarrow x_0=-3$$ (5)

$$\frac{-2+y_0}{2}=1 \Rightarrow y_0=4$$

$$Q \equiv (-3,4).$$ (5)

25

---

$A, P, B$ හා $Q$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තය $AB$ විෂ්කම්භය ලෙස ඇති වෘත්තය වේ. (10)

$(y-5)(y+3)+(x-4)(x+2)=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x-2y-23=0$

(10)

20

---

$CR^2=(4\lambda-1)^2+(5\lambda-1)^2$ හා වෘත්තයේ අරය 5 වේ. (10)

දැන් $CR^2-25=(4\lambda-1)^2+(5\lambda-1)^2-25$ (5)

$=41\lambda^2-18\lambda-23$

$=(\lambda-1)(41\lambda+23)>0$ as $\lambda>1.$ (10)

∴ $R$ ලක්ෂ්‍යය වෘත්තයට පිටතින් පිහිටයි. (5)

30

---

අවශ්‍ය ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය

$$x(4\lambda) + y(5\lambda) - (x + 4\lambda) - (y + 5\lambda) - 23 = 0$$ (10)

$$(-x - y - 23) + \lambda(4x + 5y - 9) = 0$$ (5)

$\therefore$ ස්පර්ශ ජ්‍යාය $4x + 5y - 9 = 0$ හා $x + y + 23 = 0$ රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි.

එය අචල ලක්ෂයකි. (5) (10) 30

**17.** (a) $0 \le \theta \le \pi$ සඳහා $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$ විසඳන්න.

$\cos\theta$ ඇසුරෙන් $\cos 2\theta$ හා $\cos 3\theta$ ලියා දක්වා, $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $t = \cos\theta$ වේ.

ඒ නයින්, $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල තුන ලියා දක්වා $4t^2 - 2t - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල $\cos\frac{\pi}{5}$ හා $\cos\frac{3\pi}{5}$ බව පෙන්වන්න.

$\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b) $ABC$ ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද $D$ යනු $BD : DC = m : n$ වන පරිදි $BC$ මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු; මෙහි $m, n > 0$ වේ. $B\hat{A}D = \alpha$ හා $D\hat{A}C = \beta$ බව දී ඇත. $BAD$ හා $DAC$ ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $\frac{mb}{nc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $b = AC$ හා $c = AB$ වේ.

ඒ නයින්, $\frac{mb - nc}{mb + nc} = \tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(c) $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(5) (5)

(a) $0 \le \theta \le \pi$ සඳහා $\cos 3\theta = -\cos 2\theta = \cos(\pi - 2\theta)$

$$3\theta = 2n\pi \pm (\pi - 2\theta),\ n \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

$$5\theta = 2n\pi + \pi,\ n \in \mathbb{Z} \text{ or } \theta = 2n\pi - \pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$0 \le \theta \le \pi$ බැවින් විසඳුම් $\theta = \pi,\ \frac{\pi}{5}$ හා $\frac{3\pi}{5}$ (5)

(5) (5) **30**

---

(5) (5)

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ and $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$

$\therefore\ \cos 2\theta + \cos 3\theta = 4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1$

$= 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1,$ මෙහි $t = \cos\theta.$

(10) **20**

---

$\therefore\ 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$ හි මූලයන් $\cos\pi, \cos\frac{\pi}{5}$ හා $\cos\frac{3\pi}{5}$ (10)

$\cos\pi = -1 \implies t + 1$ යනු $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$ හි සාධකයකි.

$\implies 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = (t+1)(4t^2 - 2t - 1) = 0$ (10)

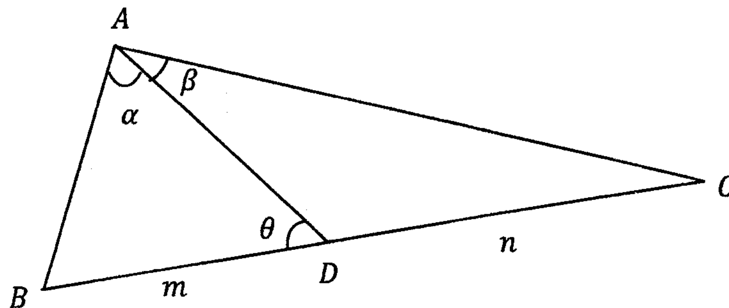
$\implies 4t^2 - 2t - 1 = 0$ හි මූලයන් $\cos\frac{\pi}{5}$ හා $\cos\frac{3\pi}{5}$. (5)

$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4\times4\times1}}{2\times4} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$ (5)

$\cos\frac{3\pi}{5} < 0$ බැවින් $\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. (5)

35

(b)




$B\hat{D}A = \theta$ යැයි ගනිමු.

සයින් නීතිය භාවිතයෙන්:

$BAD\ \Delta:\ \frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\theta}$ (10)

$ADC\ \Delta:\ \frac{DC}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin(\pi-\theta)}$ (10)

$\implies \frac{(BD)\sin\beta}{(DC)\sin\alpha} = \frac{c}{b}$

$\implies \frac{mb}{nc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. (5)

25

$$mb = nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{mb-nc}{mb+nc} = \frac{nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - nc}{nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + nc}$$ 5

$$= \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$ 5 5

$$= \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

5

20

---

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \gamma$ හා $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \delta$ යැයි ගනිමු. $0 < \delta, \gamma < \frac{\pi}{2}$.

5 $2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\gamma = \frac{\pi}{2} - \delta$

$\Leftrightarrow \tan(2\gamma) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$ ($\frac{\pi}{2} - \delta$ සුළු කෝණයක් බැවින්, $2\gamma$ ද සුළු කෝණයකි.)

$$\tan 2\gamma = \frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma} = \frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$ 5

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cot\delta = \frac{3}{4}$$ 5

$$\therefore 2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2}..$$ 5

20

---